Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Забайкальский государственный университет»

Н. Д. Савченко
Т. В. Кузьмина
Т. В. Рахлецова

ОСНОВЫ ФИЗИКИ

Часть 1
Механика. Электродинамика. Термодинамика

Учебное пособие для бакалавров
всех форм обучения

Чита
Забайкальский государственный университет
2017

УДК 53(075)
ББК 22.3я7
С126

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом
Забайкальского государственного университета

Рецензенты:

Б. А. Балаганский, канд. физ.-мат. наук, ведущий доцент кафедры информатики, Читинский институт Байкальского государственного университета, г. Чита;

Н. А. Ладнич, канд. пед. наук, доцент кафедры медицинской физики и информатики, Читинская государственная медицинская академия, г. Чита

Савченко, Нина Дмитриевна

С 126 Основы физики : учеб. пособие : [в 2 ч.] / Н. Д. Савченко, Т. В. Кузьмина, Т. В. Рахлецова ; Забайкал. гос. ун-т. – [2-е изд., испр. и доп.]. – Чита : ЗабГУ, 2017.

ISBN 978-5-9293-2064-4

Часть 1. Механика. Электродинамика. Термодинамика. – 229 с.
ISBN 978-5-9293-2065-1

Учебное пособие составлено в соответствии с ФГОС ВПО по дисциплине «Физика» для направлений инженерно-технического профиля. Ориентировано на самостоятельную аудиторную и внеаудиторную работу по основным разделам физики.

В работе в единообразной форме формируется понятийный аппарат и излагаются основные законы механики, электродинамики и термодинамики. Методика использования этих законов рассмотрена на примерах решения типовых задач. Приведены задания для контрольных работ по каждому направлению подготовки бакалавров.

Издание предназначено для студентов высших технических учебных заведений очной, заочной и других форм обучения. Может быть полезно учащимся лицеев и колледжей, а также школьникам при подготовке к ЕГЭ по физике.

УДК 53(075)
ББК 22.3я7

ISBN 978-5-9293-2065-1 (Ч. 1)
ISBN 978-5-9293-2064-4

Оглавление

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие предназначено для организации самостоятельной и аудиторной работы на практических занятиях по курсу физики со студентами инженерно-технического профиля подготовки, обучающимися по программам бакалавриата заочной формы обучения.

Пособие состоит из двух частей. Часть первая включает учебно-методические и информационно справочные материалы по следующим разделам: «Основы классической механики», «Основы релятивистской механики», «Основы электродинамики», «Основы молекулярной физики и термодинамики». Остальные разделы курса составляют содержание второй части.

Каждый раздел содержит специально подобранные задачи, как оригинальные, составленные авторами, так и известные методически ценные из разных пособий. В начале каждого раздела кратко характеризуется предмет изучения и формулируются общие задачи. Далее в единообразной форме формируется понятийный аппарат и излагаются основные законы, необходимые для полного описания рассматриваемых в разделе явлений. Методика использования законов при анализе конкретных задачных ситуаций подробно рассмотрена на примерах решения типовых задач. В заключительной части пособия приведены задания для контрольных работ и требования к их оформлению.

Предназначены студентам, обучающимся по направлениям подготовки бакалавров.

Авторский коллектив надеется, что данное пособие окажется полезным не только для студентов заочной формы обучения, работающим по программам бакалавриата, но и для студентов других форм обучения (очной, дистанционной) при выполнении ими контрольных заданий, в процессе самостоятельной работы, при подготовке к экзаменам и зачётам.

Введение

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования (ФГОС) для получения квалификации «бакалавр» по направлениям инженерно-технического профиля студенты, изучившие курс физики, должны

знать:

– фундаментальные понятия и теории классической и современной физики;

– основные физические явления, описывающие их законы и границы их применимости;

уметь:

– использовать математические методы при решении физических задач;

– анализировать влияние разных факторов на протекание физических явлений;

– проводить расчёты на основе построенных математических моделей и оценивать правдоподобность полученных результатов;

– использовать возможности вычислительной техники и программного обеспечения для поиска недостающей информации и для её обработки;

– применять полученные знания при изучении других дисциплин, выделять конкретное физическое содержание в прикладных задачах профессиональной деятельности;

владеть:

– первичными навыками и основными методами решения задач из разных разделов физики;

– методами выполнения лабораторного физического эксперимента и обработки экспериментальных результатов.

Кроме того, бакалавр должен обладать следующими междисциплинарными *общекультурными и профессиональными компетенциями*:

– владением культурой мышления, способностью к восприятию, обобщению и анализу информации, к постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1);

– умением логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2);

– стремлением к саморазвитию и самоконтролю, способностью самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности новые знания и умения (ОК-6);

– осознанием социальной значимости своей будущей профессии, обладанием высокой мотивацией к выполнению учебной и профессиональной деятельности (ОК-8);

– готовностью применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении прикладных задач (ПК-1);

– способностью выявлять естественно научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, и привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат (ПК-2).

Возможности, предоставляемые данным учебным пособием
для достижения целей, обозначенных в ФГОС

1. По каждому разделу, включённому в программу курса физики, указан список рекомендованной учебной литературы. Для облегчения ориентации студентов в обширном информационном поле в пособии приведён краткий глоссарий основных понятий и законов, который удобно использовать при подготовке к экзаменам и зачётам. При этом следует обратить внимание на единообразную форму представления информации. Например, определение любой физической величины должно

содержать ответы на следующие вопросы: что характеризует данная величина, какого рода информацию об изучаемом явлении она даёт; каков способ определения её численного значения (т. е. соответствующая формула и единицы измерения); каково правило для определения направления рассматриваемой величины (если величина векторная).

2. В пособии выделено ограниченное количество типовых задач, методы решения которых должны освоить студенты. По каждому типу задач приведены примеры, в которых подробно описана методика использования основных законов для построения математической модели конкретной задачной ситуации. Эти примеры необходимо разобрать перед выполнением контрольных заданий.

3. В прил. А к пособию, студенты могут найти необходимые для решения задач справочные материалы, а именно: числовые значения физических констант, а также табличных коэффициентов, характеризующих физические свойства вещества (см. табл. А.1–А.10), размерности и единицы измерения некоторых физических величин (см. табл. А.11), множители и приставки для образования кратных и дольных единиц (см. табл. А.12), названия и обозначения букв греческого алфавита (см. табл. А.13)

4. Самостоятельное выполнение контрольных работ является основным средством освоения теоретического материала курса, поскольку только применение знаний обеспечивает их глубокое понимание. Поэтому рекомендуется следующий порядок работы с учебным материалом по курсу физики:

а) прочитайте задачу и выделите то физическое явление, о котором идёт речь;

б) по учебнику, указанному в списке рекомендованной литературы, и по понятийному аппарату, приведенному в пособии, выясните сущность явления, выпишите и выучите основные понятия и законы, используемые при описании данного явления (полезно в отдельной тетради составить словарик терминов и законов, используемых в тексте и при решении задачи), ответьте на контрольные вопросы, приведённые в конце каждого раздела;

в) разберите приведённые в пособии примеры решения аналогичных задач, чтобы убедиться, что методика решения Вам понятна; попытайтесь воспроизвести логическую последовательность основных этапов решения рассмотренных задач;

г) вернитесь к контрольной задаче своего варианта и выясните, что известно о частных особенностях рассматриваемого явления по условию задачи; составьте математическую модель задачной ситуации, то есть запишите законы с учётом конкретных условий; проверьте полноту полученной системы уравнений и при необходимости используйте дополнительные законы или определения неизвестных величин;

д) решите полученную систему в общем виде и в числах, попытайтесь оценить правдоподобность полученного результата.

5. Освоение методов математического моделирования простейших физических задачных ситуаций и сформированность компетенций ОК-1, ОК-2 являются основными критериями при оценке контрольных работ, выполняемых студентами. Представленное в контрольной работе решение должно продемонстрировать понимание студентом сущности физического явления, описанного в тексте задачи; владение понятийным аппаратом, относящимся к рассматриваемому явлению; знание основных законов, описывающих явление, и – самое главное – умение обосновать особенности применения того или иного закона к условиям конкретной задачи. В связи с этим, решение должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими словесными пояснениями. В качестве образца используйте материалы разделов пособия «Примеры решения задач».

Глава 1. Основы классической механики

Механическое движение простейшая, но в то же время, наиболее общая форма движения материи, которая как составная часть присутствует в тепловых, электромагнитных, химических и других явлениях.

Предметом изучения классической механики является движение макротел при скоростях движения много меньших скорости света.

1.1. Общие понятия

Механическое движение – это изменение положения тел или их частей относительно друг друга с течением времени.

Относительность механического движения проявляется в том, что при рассмотрении одного и того же движения относительно разных наблюдателей (разных систем отсчёта) положение тела, траектория и скорость его движения могут оцениваться по-разному.

Система отсчёта – это совокупность тела отсчёта, системы координат, связанной с этим телом, и неподвижных относительно них инструментов для измерения расстояния и времени.

Во многих задачах в качестве тела отсчёта выбирается Земля, а в качестве системы координат – прямоугольная декартова система.

Инерциальные системы отсчёта – это системы, в которых свободное тело (тело, на которое не действуют другие тела или их действие скомпенсировано) движется равномерно и прямолинейно сколь угодно долго.

Все законы классической механики справедливы только в инерциальных системах отсчёта.

Основные типы движения:

1) *поступательное движение* – движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной самой себе или, по-другому, когда все точки тела движутся одинаково. В зависимости от формы траектории поступательное движение может быть как прямолинейным, так и криволинейным;

2) *вращательное движение* вокруг неподвижной оси – движение, при котором все точки движутся по окружностям разных радиусов, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Более сложные типы движения (например, движение катящегося шара) можно рассматривать как совокупность простых: вращения вокруг центра масс и поступательного движения самого центра масс.

Механические модели тел:

1) *материальная точка* – тело, формой и размерами которого можно пренебречь по сравнению с характерными расстояниями, рассматриваемыми в задаче (используется при описании поступательного движения);

2) *абсолютно твёрдое тело* – тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется во время движения, то есть тело, для которого можно пренебречь его деформацией (используется при описании вращательного движения).

1.2. Кинематика поступательного и вращательного движений

Основная задача кинематики – описание движения тел без рассмотрения причин, вызывающих изменение этого движения. Описать движение – это значит, во-первых, установить количественные характеристики, по которым одно движение может отличаться от другого; во-вторых, установить связи между этими характеристиками, то есть законы, позволяющие предсказать положение тела и состояние его движения в произвольный момент времени, если известны начальные условия.

1.2.1. Понятийный аппарат (кинематические характеристики)

Обращаясь к определению механического движения, замечаем, что для его описания необходимо ввести четыре группы величин:

– величины, описывающие положение тела относительно выбранной системы отсчёта;

– величины, описывающие изменение положения;

– величины, описывающие быстроту этого изменения с течением времени (состояние движения);

– величины, описывающие изменение состояния движения.

Величины, характеризующие положение тела

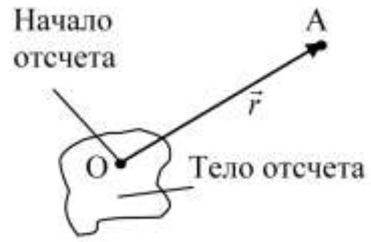

Рис. 1.1

$\vec{r}$ – ***радиус-вектор точки***, численное значение определяется длиной отрезка от начала отсчёта до положения точки в данный момент времени, направлен от начала отсчёта к точке (см. рис. 1.1);

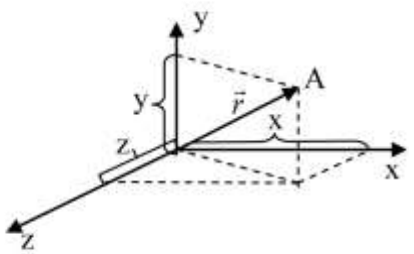

Рис. 1.2

(x, y, z) – ***координаты точки*** определяются длинами отрезков координатных осей (рис. 1.2);

S – ***длина пути*** – скалярная величина, численно равная длине отрезка траектории от начала отсчёта до положения точки в данный момент времени (см. рис. 1.3).

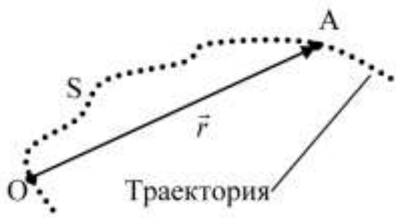

Рис. 1.3

Связь между этими характеристиками:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \ |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ ;$$

φ – ***угол поворота*** – величина, характеризующая положение вращающегося тела в данный момент времени, численно равная углу между радиус-вектором выбранной точки тела и направлением на нулевую отметку на шкале (начало отсчёта углов).

Величины, характеризующие изменение положения тела

$\Delta\vec{r}$ – ***перемещение*** – вектор, проведённый из начального положения точки (A_1) в конечное положение (A_2) и направленный от A_1 к A_2 (см. рис. 1.4):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1;$$

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2};$$

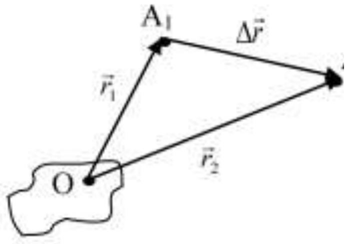

Рис. 1.4

ΔS – ***приращение (изменение) длины пути*** численно равно длине отрезка траектории от начального положения точки (A_1) до её конечного положения (A_2) (см. рис. 1.5):

$$\Delta S = S_2 - S_1.$$

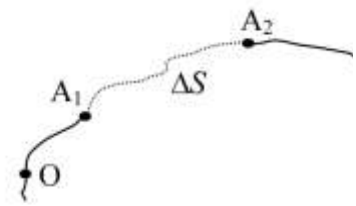

Рис. 1.5

В частном случае (если движение прямолинейное) приращение длины пути может совпадать с модулем перемещения;

l – ***расстояние, пройденное телом*** во время движения.

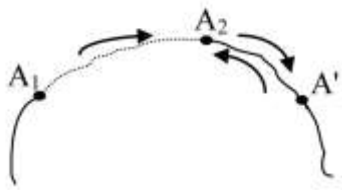

Рис. 1.6

Предположим, точка переместилась сначала из положения A_1 в положение A', а затем из A' в A_2, тогда l численно равно сумме отрезков траектории: $l = A_1A' + A'A_2$ (см. рис. 1.6).

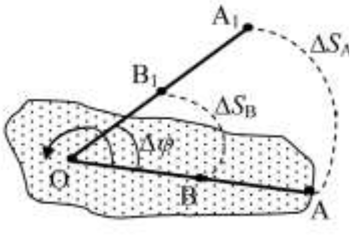

Рис. 1.7

В частном случае (если движение происходит в одну сторону без возвратов) расстояние, пройденное телом, может совпадать с приращением длины пути;

$\Delta\varphi$ – ***угловое перемещение*** – физическая величина, характеризующая изменение положения вращающегося тела, численно равная углу поворота радиус – вектора произвольной точки тела (см. рис. 1.7).

По рисунку видно, что при вращении тела приращение длины пути для разных точек тела различно ($\Delta S_A > \Delta S_B$), но угловое перемещение $\Delta\varphi$ одинаково для всех точек тела.

Величины, характеризующие состояние движения

Средняя скорость перемещения – векторная физическая величина, численно равная отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ к тому промежутку времени, в течение которого это перемещение было совершено, и направленная так же, как и вектор $\Delta\vec{r}$:

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.1)$$

При перемещении по замкнутой траектории, очевидно, $\Delta\vec{r} = 0$ и $\langle\vec{\upsilon}\rangle = 0$.

Средняя путевая скорость – скалярная величина, численно равная отношению расстояния, пройденного телом, к тому промежутку времени, за которое это расстояние было пройдено:

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{l}{\Delta t}. \qquad (1.2)$$

Мгновенная скорость (линейная) – векторная физическая величина, характеризующая состояние движения в данный момент времени, равная первой производной от радиус-вектора точки по времени и направленная по касательной к траектории движения.

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.3)$$

При $\Delta t \to 0$ бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$ по модулю будет совпадать с бесконечно малым приращением длины пути *dS*, то есть $|d\vec{r}| = dS$, тогда модуль скорости найдётся как первая производная от пути по времени:

$$|\vec{\upsilon}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt} = S'. \qquad (1.4)$$

При координатном способе описания движения проекции скорости на координатные оси: $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}$; $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$; $\upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$, а модуль скорости: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$.

Угловая скорость (мгновенная) – векторная физическая величина, характеризующая состояние вращательного движения в данный момент времени, численно равная первой производной от угла поворота по времени и направленная вдоль оси вращения в ту сторону, откуда вращение кажется происходящим против часовой стрелки (то есть по правилу правого винта) (см. рис. 1.8):

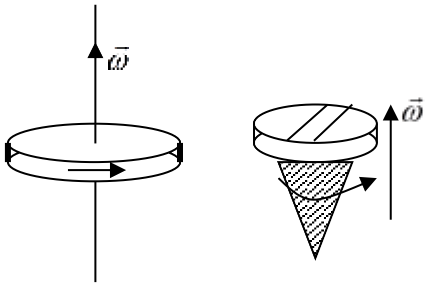

Рис. 1.8

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi'. \qquad (1.5)$$

Величины, характеризующие изменение состояния движения

Мгновенное полное ускорение (линейное) – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения вектора линейной скорости, численно равная первой производной от вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \qquad (1.6)$$

Полное ускорение может быть направлено под любым углом к скорости в зависимости от характера движения.

Так как скорость – векторная величина, то изменения скорости могут происходить по двум признакам: по численному значению (по модулю) и по направлению. Поэтому полное ускорение принято делить на две составляющие: тангенциальное (касательное) ускорение ($\vec{a}_\tau$), которое даёт информацию об изменении численного значения скорости, и нормальное (центростремительное) ускорение ($\vec{a}_n$), которое даёт информацию об изменении направления скорости.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.7)$$

Тангенциальное ускорение (***касательное***) – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения скорости тела по абсолютному значению, численно равная первой производной от модуля скорости по времени и направленная по касательной к траектории в ту же сторону, что и скорость, если движение ускоренное, и противоположно скорости, если движение замедленное:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon'. \quad (1.8)$$

Нормальное ускорение (центростремительное) – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения направления скорости, численно равная отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории, направленная вдоль радиуса кривизны к центру кривизны:

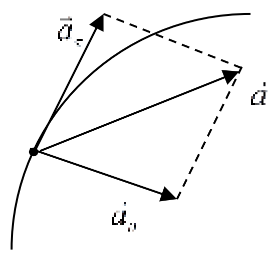

Рис. 1.9

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \quad (1.9)$$

Так как векторы $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ направлены под прямым углом друг к другу, то *связь между их модулями* найдётся по теореме Пифагора (см. рис. 1.9):

$$a_{\text{полн.}} = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (1.10)$$

При координатном способе описания движения полное ускорение может быть представлено через свои проекции на координатные оси:

$$a_{\text{полн.}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \text{где } a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \; a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt}.$$

Угловое ускорение – векторная физическая величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости, численно равная первой производной от угловой скорости по времени и направленная вдоль оси вращения в ту же сторону, что и угловая скорость, если скорость возрастает, и противоположно ей, если она убывает.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.11}$$

Поскольку мы ограничиваемся рассмотрением вращения вокруг неподвижной оси, угловое ускорение не делится на составляющие подобно линейному.

Связь между угловыми характеристиками вращающегося тела и линейными характеристиками движения его отдельных точек

$$\Delta S = \Delta\varphi \cdot R; \;\; \upsilon = \omega \cdot R; \;\; a_\tau = \varepsilon \cdot R; \;\; a_n = \omega^2 \cdot R, \tag{1.12}$$

где R – радиус окружности, по которой движется рассматриваемая точка вращающегося тела.

Классификация движений

Наиболее информативной характеристикой движения является ускорение, поэтому оно используется в качестве основания для классификации движений.

Нормальное ускорение несёт информацию об изменении направления скорости, то есть об особенностях траектории движения:

$a_n = 0$ – *прямолинейное движение* (направление скорости не меняется);

$a_n \neq 0$ – *криволинейное движение*.

Тангенциальное ускорение определяет характер изменения модуля скорости с течением времени. По этому признаку принято выделять следующие виды движения:

$a_\tau = 0$ – *равномерное движение* (абсолютное значение скорости не меняется);

$a_\tau \neq 0$ – *неравномерное движение* (*ускоренное,* если ускорение сонаправлено со скоростью или *замедленное*, если это ускорение направлено противоположно скорости).

Аналогично для вращательного движения:

$\varepsilon = 0$ – *равномерное вращение*;

$\varepsilon \neq 0$ – *неравномерное вращение* (*ускоренное или замедленное*).

Наиболее простыми частными случаями *неравномерного* движения являются

– *равнопеременное движение* (*равноускоренное или равнозамедленное*), при котором $a_\tau = const \neq f(t)$ – тангенциальное ускорение не зависит от времени, остаётся постоянным во время движения;

– *гармоническое колебательное движение (*например, движение грузика на пружине*)*, при котором тангенциальное ускорение меняется с течением времени по закону синуса или косинуса: $a_\tau = a_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ или $a_\tau = a_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Аналогично для вращательного движения:

– *равноускоренное или равнозамедленное вращение,* при котором $\varepsilon = const$;

– *крутильные колебания,* если угловое ускорение меняется с течением времени по закону синуса или косинуса.

1.2.2. Кинематические законы

Кинематическими законами будем называть законы, выражающие изменение кинематических характеристик движения с течением времени:

– закон пути $S = S(t)$ или $\varphi = \varphi(t)$;

– закон скорости $\upsilon = \upsilon(t)$ или $\omega = \omega(t)$;

– закон ускорения $\alpha = \alpha(t)$ или $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

Кинематические законы скорости и пути для поступательного и вращательного движений в общем виде. Если ускорение рассчитывается как производная от скорости по времени (см. определение), то скорость по отношению к ускорению является первообразной, а изменение скорости рассчитывается как интеграл. Аналогично далее: если модуль скорости рассчитывается как производная от пути по времени (см. определение), то путь по отношению к скорости является первообразной, а изменение длины пути рассчитывается как интеграл:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \upsilon_0 + \int\limits_0^t a_\tau(t)dt; \;\; \omega = \omega_0 + \int\limits_0^t \varepsilon(t)dt \\ S = S_0 + \int\limits_0^t \upsilon(t)dt; \;\; \varphi = \varphi_0 + \int\limits_0^t \omega(t)dt \end{array}\right\}. \qquad (1.13)$$

Как видно, для решения задач на основе кинематических законов необходимо знать закон изменения ускорения с течением времени, а также начальные условия – S_0 (или φ_0), υ_0 (или ω_0), т. е. положение и скорость тела в начальный момент t_0.

Таблица 1.1

Кинематические законы для простейших видов движения

Движение	*Закон ускорения*	*Закон скорости*	*Закон пути*
Равномерное	$a_\tau(t) = 0;$ $\varepsilon(t) = 0$	$\upsilon(t) = \upsilon_0 = const;$ $\omega(t) = \omega_0 = const$	$S(t) = \upsilon t;$ $\varphi(t) = \omega t$
Равнопеременное	$a_\tau(t) = const;$ $\varepsilon(t) = const$	$\upsilon(t) = \upsilon_0 + a_\tau t;$ $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$	$s(t) = \upsilon_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2;$ $\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$
Гармоническое колебательное	$a_\tau(t) = a^{\max} \sin(\omega t);$ $\varepsilon(t) = \varepsilon^{\max} \sin(\omega t)$	$\upsilon(t) = \upsilon^{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right);$ $\omega(t) = \omega^{\max} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$	$S(t) = S^{max} \sin(\omega t - \pi);$ $\varphi(t) = \varphi^{\max} \sin(\omega t - \pi)$

1.3. Динамика поступательного и вращательного движений

Основная задача динамики – установить причины, приводящие к изменению состояния движения тел, и факторы, определяющие ускорения, приобретаемые телами. В рамках классической механики рассматриваются только два фактора, влияющие на ускорение:

– внешние воздействия на тело;

– собственные инертные свойства тел.

1.3.1. Понятийный аппарат (динамические характеристики)

Величины, характеризующие интенсивность внешних воздействий при поступательном движении

Сила – векторная физическая величина, характеризующая интенсивность внешних воздействий (точнее взаимодействия тел) при поступательном движении. Её численное значение измеряется либо на основании II закона Ньютона либо (при статических проявлениях) путём сравнения с эталоном.

Направление вектора силы $\vec{F}$ определяется её физической природой (например, сила трения всегда направлена по касательной к трущимся поверхностям в сторону противоположную относительной скорости движения тел). Результат действия силы не меняется, если точку её приложения переносить вдоль линии действия силы.

Импульс силы – векторная физическая величина, характеризующая действие силы с учётом времени её действия. Направление импульса силы совпадает с направлением самой силы, а числовое значение определяется произведением силы на время её действия (если сила остаётся постоянной во время движения):

$$\vec{И}_F = \vec{F}\Delta t. \tag{1.14}$$

Если сила изменяется с течением времени, то импульс силы вычисляется путём интегрирования:

$$\vec{И}_F = \int_0^t \vec{F}dt. \tag{1.15}$$

Работа силы – скалярная физическая величина, характеризующая действие силы, с учётом расстояния, пройденного телом под действием этой силы, численно равная скалярному произведению векторов силы и перемещения.

При постоянной силе:

$$A_F = \left(\vec{F}, \Delta\vec{r}\right) = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha = F_r \cdot \Delta r, \tag{1.16}$$

где $F_r = F \cdot cos\alpha$ – проекция силы на направление перемещения, Δr – перемещение тела, α – угол между направлением силы и направлением перемещения.

При переменной силе работа вычисляется путём интегрирования, при этом можно учесть, что для бесконечно малых перемещений справедливо $dr = dS$, поэтому:

$$A_F = \int_{S_1}^{S_2} F_S dS. \tag{1.17}$$

Величины, характеризующие интенсивность внешних воздействий при вращательном движении

Поскольку при поступательном движении тело рассматривается как материальная точка, все силы можно считать приложенными в одной точке в центре масс. Однако при рассмотрении вращательного движения этого делать нельзя, поскольку результат действия силы в этом случае существенно зависит от точки её приложения.

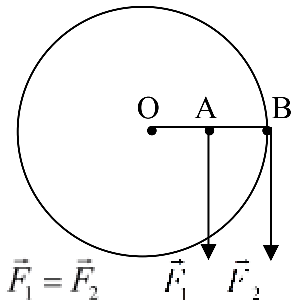

Рис. 1.10

Если к телу, поочередно прилагать силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, совпадающие по абсолютной величине и направлению, но приложенные на разных расстояниях от оси (см. рис. 1.10), то, очевидно, что изменение состояния движения тела под действием силы $\vec{F}_2$, будет более значительным, чем под действием силы $\vec{F}_1$. Этот факт приводит к необходимости введения новой величины для характеристики воздействия тел друг на друга при вращательном движении.

Пусть, на твёрдое тело, имеющее неподвижную ось вращения OO, действует сила $\vec{F}$ (см. рис. 1.11). Разложим эту силу на две составляющие: $\vec{F}_\perp$, действующую в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и

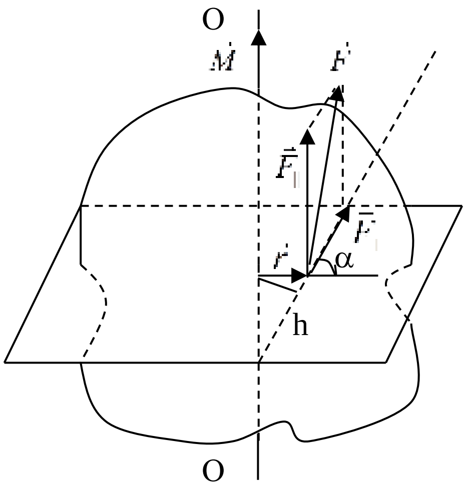

Рис. 1.11

$\vec{F}_{II}$ – параллельную оси вращения. Составляющая $\vec{F}_{II}$ не может вызвать вращательного движения вокруг оси ОО. Вращающее действие силы $\vec{F}$ обусловлено её составляющей $\vec{F}_{\perp}$.

Момент силы относительно оси – векторная физическая величина, характеризующая интенсивность внешних воздействий при вращательном движении, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного от оси вращения к точке приложения силы и лежащего в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, на составляющую силы $\vec{F}_{\perp}$, действующую в этой же плоскости:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}. \qquad (1.18)$$

Вектор $\vec{\text{M}}$ направлен вдоль оси вращения в ту сторону, откуда кратчайший переход от $\vec{r}$ к $\vec{F}_{\perp}$ происходит против часовой стрелки (то есть направление $\vec{\text{M}}$ связано с направлением вращения тела под действием заданной силы правилом правого винта).

Модуль векторного произведения можно найти по следующей формуле:

$$M = F_{\perp} r \sin\alpha . \qquad (1.19)$$

Как видно, из рис. 1.11, $r \cdot \sin\alpha = h$, тогда

$$\text{M} = F_{\perp} \times h, \qquad (1.20)$$

где h – плечо силы – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила $F_{\perp}$; α – угол между положительными направлениями векторов $\vec{F}_{\perp}$ и $\vec{r}$.

Импульс момента силы – векторная физическая величина, характеризующая действие момента силы с учётом времени его действия. Направление импульса момента силы совпадает с направлением момента силы, а числовое значение определяется произведением момента силы на время его действия (если момент силы остаётся постоянным во время движения):

$$\vec{И}_M = \vec{M} \cdot \Delta t. \qquad (1.21)$$

Если момент силы изменяется с течением времени, то импульс момента силы вычисляется путём интегрирования:

$$\vec{И}_M = \int_0^t \vec{M} dt. \qquad (1.22)$$

Работа момента силы – скалярная физическая величина, характеризующая действие момента силы, с учётом углового перемещения, совершённого под действием этого момента силы, численно равная скалярному произведению векторов момента силы и углового перемещения.

При постоянном моменте силы:

$$A_M = \left(\vec{M}, \Delta\vec{\varphi}\right) = M \cdot \Delta\varphi. \qquad (1.23)$$

При переменном моменте силы работа вычисляется путём интегрирования:

$$A_M = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi. \qquad (1.24)$$

Величины, характеризующие инертные свойства тел

Инертность – это способность тел в большей или меньшей степени изменять состояние движения под действием внешних сил. То тело, которое при заданном воздействии изменяет состояние своего движения в меньшей степени, считается более инертным.

Масса – скалярная физическая величина, характеризующая инертные свойства тел при поступательном движении (масса – мера инертности). Относится к основным величинам системы СИ и определяется путём сравнения с эталоном.

Масса связана с объёмом тела: $m = \rho V$, где ρ – плотность вещества, из которого состоит тело (табличная величина).

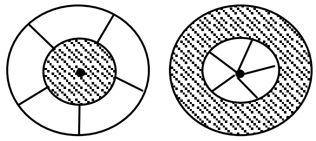

Рис. 1.12

Выясним, можно ли воспользоваться массой как характеристикой инертных свойств тел для вращательного движения тел. Пусть есть два колеса с одинаковыми внешними радиусами и одинаковые по массе, но у первого основная часть массы сосредоточена вблизи оси вращения, а обод колеса лёгкий, у второго, наоборот, основная часть массы сосредоточена по ободу (см. рис. 1.12). Будут ли эти колеса вести себя одинаково при одинаковых внешних воздействиях? Очевидно, нет. Второе колесо будет проявлять бóльшую инертность: при одинаковых внешних воздействиях его угловая скорость будет меняться в меньшей степени, чем у первого колеса. Можно рассуждать и в обратном порядке: если мы захотели бы одинаково изменить угловую скорость вращения этих колес, то ко второму колесу пришлось бы приложить бóльшие воздействия, чем к первому (второе колесо труднее разогнать и труднее остановить, следовательно, его инертность больше).

Таким образом, масса тела сама по себе не даёт представления об инертных свойствах тел по отношению к вращательному движению. Инертность тел в этом случае зависит ещё и от того, как распределена эта масса по отношению к оси вращения. В связи с этим вводится новая величина.

Момент инерции – скалярная физическая величина, характеризующая инертные свойства тел во вращательном движении. Для материальной точки момент инерции численно равен произведению массы точки на квадрат её расстояния от оси вращения:

$$I_{\text{точки}} = mr^2, \qquad (1.25)$$

а для системы определяется суммой произведений масс отдельных точек на квадраты их расстояний от оси вращения:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2. \qquad (1.26)$$

Это вытекает из экспериментально установленного свойства аддитивности момента инерции, выражающегося в том, что момент инерции системы равен сумме моментов инерции отдельных частей этой системы (тело можно рассматривать как систему материальных точек).

Более строго, так как тело состоит из бесконечно большого числа материальных точек, а масса одной точки $m_i \to 0$, момент инерции тела следует искать путём интегрирования:

$$I = \int_0^m r^2 dm = \int_0^{\mathrm{V}} r^2 \rho d\mathrm{V}, \qquad (1.27)$$

где dm – бесконечно малая часть массы тела, сосредоточенная в бесконечно малом объёме $d\mathrm{V}$; ρ – плотность вещества.

Результат интегрирования по формуле (1.27) зависит от распределения массы по отношению к оси вращения, то есть от формы тела и расположения оси вращения.

Таблица 1.2

Формулы для вычисления моментов инерции некоторых тел

Тело	*Положение оси вращения*	*Момент инерции*
Полый тонкостенный цилиндр или кольцо	Совпадает с осью симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	Совпадает с осью симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной *l*	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}mL^2$
Шар радиуса R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Очевидно, что при изменении положения оси вращения изменяется распределение массы тела относительно оси, следовательно, и его момент инерции.

Теорема Штейнера: *момент инерции тела относительно произвольной оси (I) равен сумме момента инерции этого тела относительно* *оси, параллельной данной, но проходящей через центр масс (I_c), и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями (d):*

$$I = I_C + md^2. \tag{1.28}$$

Теорема позволяет находить момент инерции тела относительно произвольной оси, если известен момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс:

Величины, характеризующие запас движения тела

Если тело, движущееся со скоростью υ попытаться остановить, то воздействие, которое при этом придется приложить, зависит не только от скорости движения, но и от инертных свойств тела. Для характеристики запаса движения тела при поступательном и вращательном движении используются две векторные и две скалярные величины:

Импульс тела – векторная величина, численно равная произведению массы тела на скорость его движения, совпадающая по направлению со скоростью:

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}. \tag{1.29}$$

Момент импульса тела – векторная величина, численно равная произведению момента инерции тела на угловую скорость его движения, совпадающая по направлению с угловой скоростью:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \tag{1.30}$$

Кинетическая энергия тела при поступательном движении – скалярная величина, численно равная половине произведения массы тела на квадрат скорости:

$$W_k = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{1.31}$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении – скалярная величина, численно равная половине произведения момента инерции тела на квадрат угловой скорости:

$$W_k^{вр} = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{1.32}$$

1.3.2. Динамические принципы и законы

Принцип независимости действия сил: результат действия силы на тело не зависит от того, действуют на это тело одновременно и другие силы или нет.

Этот принцип является обобщением экспериментальных фактов для случая нерелятивистских движений и значительно упрощает расчеты в ситуациях, когда на тело действует несколько сил одновременно. Из принципа независимости сил следует, что действие нескольких сил эквивалентно действию некоторой результирующей (равнодействующей) силы, которая может быть найдена как векторная сумма всех сил, действующих на тело:

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{1.33}$$

Закон инерции (I закон Ньютона)**:** если на тело не действуют никакие силы или их равнодействующая равна нулю, то всегда можно найти такую систему отсчёта, в которой данное тело движется равномерно и прямолинейно, либо покоится.

Этот закон выделяет из всех систем отсчёта особый класс систем, которые принято называть *инерциальными системами*. Все законы классической механики установлены и выполняются только в инерциальных системах отсчёта. Существует множество таких систем, поскольку любая система, движущаяся относительно инерциальной равномерно и прямолинейно, также является инерциальной.

Механический принцип относительности. Рассмотрим связь между характеристиками движения при переходе от одной инерциальной системы к другой.

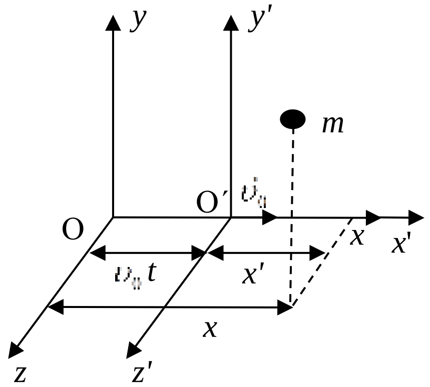

Рис. 1.13

Пусть некоторая система O′ движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{\upsilon}_0$ относительно неподвижной системы O. На рис. 1.13 для простоты принято, что координатные оси в этих системах ориентированы параллельно, и система O′ движется вдоль оси x. В начальный момент (t = 0) начала отсчёта обеих систем совпадают. Тогда очевидно, что координаты материальной точки *m* в этих системах отсчёта в момент времени *t* связаны соотношениями, которые принято называть ***преобразования Галилея***:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + \upsilon_0 t \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t'. \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

Из этих соотношений следует, что перемещения тел и их линейные размеры, определяемые как разность координат (например, $l_x = x_2 - x_1$), *абсолютны (инвариантны),* то есть одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. Последнее равенство в системе (1.34) соответствует утверждению, что часы идут одинаково во всех инерциальных системах отсчёта, следовательно: интервалы времени между двумя событиями *($\Delta t = t_2 - t_1$)* так же *абсолютны (инвариантны).* Обобщая на случай произвольного направления движения системы O′, в векторной форме можно записать: $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{\upsilon}_0 t$.

Дважды дифференцируя по времени это равенство, получим, во-первых, ***классический закон сложения скоростей***: скорость тела относительно неподвижной системы отсчёта (абсолютная скорость) равна сумме скоростей движения этого тела относительно подвижной системы (относительной скорости) и движения подвижной системы относительно неподвижной (переносной скорости):

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{\upsilon}_0. \qquad (1.35)$$

Во-вторых, ***закон инвариантности ускорения:*** ускорения тел одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта:

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Итак, приходим к выводу, что хотя координаты и скорость тела могут иметь разные значения в разных системах отсчёта, но оценка изменения состояния движения (то есть $\Delta\vec{r}$ и $\vec{a}$) не зависят от выбора системы отсчёта. Этот вывод и составляет содержание ***механического принципа относительности*** или принципа равноправия всех инерциальных систем отсчета. Обычно его формулируют следующим образом:

– все явления, связанные с изменением механического состояния тел, при одинаковых начальных условиях протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета;

– ни какими механическими опытами, произведенными внутри такой системы, невозможно установить движется система равномерно и прямолинейно или покоится;

– все законы механики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчёта.

Закон действия и противодействия (III закон Ньютона). Воздействие тел друг на друга всегда носит характер взаимодействия. Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие. При этом силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и противоположны по направлению (см. рис. 1.14).

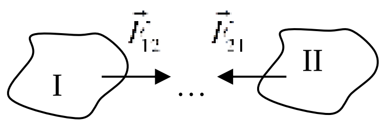

Рис. 1.14

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (1.36)$$

Основой закон динамики (II закон Ньютона). Из I закона Ньютона следует, что в инерциальных системах отсчёта единственной причиной, вызывающей изменение состояния движения тела (то есть появление ускорений), является действие других тел.

II закон Ньютона в словесной формулировке звучит одинаково как для поступательного, так и для вращательного движений. Ускорения, приобретаемые телами, прямо пропорциональны интенсивности внешних воздействий и обратно пропорциональны собственным инертным свойствам тел.

Для поступательного движения:

$$\vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}. \tag{1.37}$$

Для вращательного движения:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\sum \vec{M}}{I}. \tag{1.38}$$

Основной закон динамики содержит ещё одну важную информацию:

Направление полного линейного ускорения совпадает с направлением равнодействующей всех сил (то есть с векторной суммой сил), а при вращательном движении *направление углового ускорения совпадает с направлением векторной суммы моментов сил.*

При решении задач более удобной формой записи этого закона является: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$; $\sum \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$.

Теоремы об изменении импульса и момента импульса тела. Запишем II закон Ньютона, введя в него определение ускорения как первой производной скорости по времени: $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$. Под $\vec{F}$, здесь будем подразумевать равнодействующую всех сил, действующих на тело. Умножим левую и правую часть уравнения на dt и внесём массу под знак дифференциала:

$$d(m\vec{\upsilon}) = \vec{F}dt, \tag{*}$$

по определению $m\vec{\upsilon}=\vec{P}$ – импульс тела, а $d(m\vec{\upsilon})=d\vec{P}$ – изменение импульса тела, произошедшие за бесконечно малый промежуток времени dt. Если нас интересует изменение, произошедшее за конечный интервал времени от 0 до t, проинтегрируем выражение (*) с учётом введенных обозначений $\int_{P_1}^{P_2} d\vec{P}=\int_0^t \vec{F}dt$, где $\int_{P_1}^{P_2} d\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=\Delta\vec{P}$, тогда

$$\Delta\vec{P}=\int_0^t \vec{F}dt \text{ или } \Delta\vec{P}=\vec{И}_F. \qquad (1.39)$$

Величина $\vec{И}_F=\int_0^t \vec{F}dt$ называется импульсом силы (см. определение).

Уравнение (1.39) принято называть ***теоремой об изменении импульса тела:*** изменение импульса тела равно сумме импульсов сил, действующих на тело.

Из этой теоремы следует, что изменение импульса тела определяется не только самой силой, но и временем её действия: одинаковое изменение импульса тела, можно получить, действуя малой силой длительное время или большой силой в течение короткого промежутка времени.

Связь силы с изменением импульса: сила равна скорости изменения импульса тела:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}. \qquad (1.40)$$

Это соотношение вытекает из (1.39) при его записи в дифференциальной форме, а с математической точки зрения означает, что сила равна первой производной от импульса тела по времени.

Проделав аналогичные рассуждения для вращательного движения, получим ***теорему об изменении момента импульса тела:*** изменение момента импульса тела равно сумме импульсов моментов сил, действующих на тело:

$$\Delta\vec{L}=\int_0 \vec{M}dt. \qquad (1.41)$$

Связь момента силы с изменением момента импульса: момент силы равен скорости изменения момента импульса тела:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (1.42)$$

Это соотношение вытекает из (1.41), а с математической точки зрения означает, что момент силы равен первой производной от момента импульса тела по времени.

Теорема об изменении кинетической энергии. Если известен закон изменения силы в зависимости от расстояния между взаимодействующими телами, тогда возможно выполнить следующие преобразования II закона Ньютона: умножим левую и правую часть скалярно на $d\vec{r}$ – бесконечно малое перемещение тела под действием силы $\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \cdot \vec{a} \cdot d\vec{r}.$

Рассмотрим скалярное произведение $\vec{a} \cdot d\vec{r} = \dfrac{d\vec{\upsilon} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon}$, тогда

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon}. \qquad \text{(v)}$$

Используя свойства скалярного произведения $\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot d\upsilon$ и $|d\vec{r}| = dS$ правую часть уравнения (v) можно записать в виде: $m\upsilon \cdot d\upsilon$, а левую – в виде: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Fdr\cos\alpha = FdS\cos\alpha = F_S dS$. С учётом этих преобразований: $m\upsilon \cdot d\upsilon = F_S dS$. Проинтегрируем полученное выражение: $\int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon \cdot d\upsilon = \int\limits_{S_1}^{S_2} F_S dS$, где $\int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon \cdot d\upsilon = m\int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \upsilon \cdot d\upsilon = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_1^2}{2} = \Delta W_k$ – изменение кинетической энергии, а $A_F = \int\limits_{S_1}^{S_2} F_S dS$ – работа силы (см. определение).

Окончательно получаем *теорему об изменении кинетической энергии* при поступательном движении: изменение кинетической энергии тела при поступательном движении равно работе сил, действующих на тело:

$$\Delta W_k = \int\limits_{S_1}^{S_2} F_S dS \text{ или } \Delta W_k = A_F. \tag{1.43}$$

По аналогии для вращательного движения:

$\dfrac{I\omega^2}{2} = W_k^{\text{вр}}$ – кинетическая энергия вращательного движения тела.

$A_{\text{М}} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \text{M} d\varphi$ – работа момента силы.

Теорема об изменении кинетической энергии при вращательном движении: изменение кинетической энергии вращательного движения равно работе моментов сил, действующих на тело:

$$\Delta W_k^{\text{вр}} = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \text{M} d\varphi \text{ или } \Delta W_k^{\text{вр}} = A_{\text{М}}. \tag{1.44}$$

Как видно из приведённых рассуждений, теоремы об изменении импульса, момента импульса и кинетической энергии, можно рассматривать как другие варианты выражения основного закона динамики, который связывает характеристики взаимодействия с характеристиками изменения состояния движения тел. Обратим внимание, что все формулировки выражают одну и ту же стержневую идею механики: изменение состояния движения возникает только в результате действия тел друг на друга.

Таблица 1.3

Разные формулировки основного закона динамики

Поступательное движение	***Вращательное движение***
$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\int \vec{F} dt = \Delta \vec{P}$ $\int F_S dS = \Delta W_k$	$\sum \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ $\int \vec{M} dt = \Delta \vec{L}$ $\int M d\varphi = \Delta W_k^{\text{вр}}$

1.3.3. Законы для разных видов сил. Потенциальная энергия взаимодействия

К механическим силам принято относить три вида сил: гравитационные, упругие и силы трения

Гравитационные силы – это наиболее универсальные силы, которые действуют между любыми материальными объектами, даже если тела не находятся в непосредственном соприкосновении. Гравитационные силы, являются силами притяжения, они направлены по прямой, соединяющей взаимодействующие материальные точки.

Закон Всемирного тяготения: две частицы притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс частиц и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.45}$$

где m_1 и m_2 – величины, характеризующие гравитационные свойства тел и, как установлено в настоящее время, совпадающие с инертными массами тел; $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Нм}^2}{\text{кг}^2}$ – гравитационная постоянная – универсальная физическая константа, не зависящая ни от каких физических свойств тел и окружающей их среды.

В силу малости гравитационной постоянной гравитационные силы оказывают существенное влияние на движение тел в мегамире (планеты, звезды) и в том случае, когда хотя бы одно из тел имеет значительную массу. В записанном виде закон всемирного тяготения можно применять для расчёта силы взаимодействия тел, собственные размеры которых малы по сравнению с расстоянием r между ними, а также когда тела имеют сферически симметричное распределение масс, тогда под r следует подразумевать расстояние между центрами сфер.

Частным случаем гравитационного взаимодействия является взаимодействие тел, находящихся вблизи поверхности Земли, с Землей.

Закон для силы тяжести:

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = \overline{m}\vec{g}, \tag{1.46}$$

где m – масса тела; g – ускорение силы тяжести (ускорение свободного падения).

Ускорение свободного падения зависит от высоты тела над поверхностью Земли (h) и от широты местности (например, на полюсах $g \approx 9{,}82$ м/с^2, а на экваторе $g \approx 9{,}78$ м/с^2). Во многих задачах можно пренебрегать отличием формы Земли от точного шара и вращением Земли вокруг своей оси, тогда при условии $h << R_з$ можно принять $\frac{\gamma \cdot m_з}{R_з^2} = g$,

где $m_з$ – масса Земли, $R_з$ – радиус Земли.

Силы упругости возникают при любом изменении формы и размеров тел, то есть при их деформации. Существует много видов деформации – всестороннего или одностороннего сжатия (растяжения), сдвига, кручения, изгиба и т. д. Ограничимся рассмотрением деформации одностороннего растяжения (сжатия).

Закон Гука: при малых деформациях абсолютная деформация и сила пропорциональны друг другу:

$$F = k\Delta l, \tag{1.47}$$

где $\Delta l = l - l_0$ – абсолютное растяжение (l_0 – начальная длина образца, l – длина образца после деформации).

Чтобы вызвать деформацию одностороннего растяжения, необходимо приложить силы, перпендикулярные поперечному сечению образца (см. рис. 1.15).

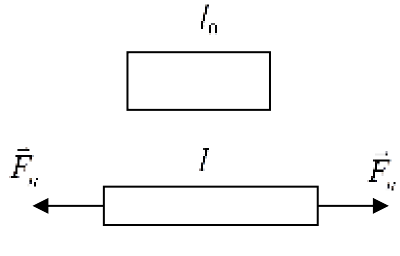

Рис. 1.15

В технических дисциплинах закон Гука формулируется чаще через относительное растяжение и приложенное напряжение: *при малых деформациях относительная деформация и напряжение пропорциональны друг другу*

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1.48}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l_0}$ – относительное растяжение; $\sigma = \dfrac{F_n}{S}$ – нормальное напряжение (сила, отнесенная к площади поперечного сечения образца).

В приведённых формулировках закона Гука присутствуют коэффициенты пропорциональности, характеризующие упругие свойства тел.

E – модуль Юнга определяет упругие свойства вещества, из которого сделан образец, и является табличной величиной.

k *– коэффициент жёсткости* зависит не только от материала, но и от геометрических характеристик образца – его размера и формы. Например, для образца, площадь сечения которого (S) одинакова по всей длине (l), $k = \dfrac{E \cdot S}{l}$.

Действие закона Гука ограничено областью малых упругих деформаций. При значительных деформациях они становятся пластическими. Для пластических деформаций нарушается пропорциональная зависимость между силой и величиной деформации, кроме того, после снятия внешних напряжений образец не восстанавливает свою форму и объём, в нём сохраняется остаточная деформация. Дальнейшее наращивание деформации приводит к разрушению образца.

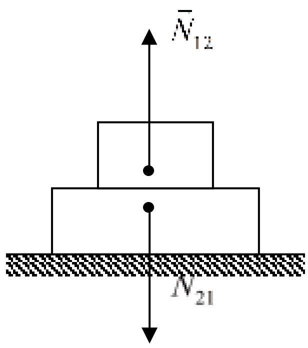

Рис. 1.16

Частным случаем проявления сил упругости являются силы реакции опоры (силы нормального давления), возникающие при непосредственном контакте двух тел, когда можно пренебречь их деформацией, то есть считать тела абсолютно твёрдыми. Силы реакции опоры направлены перпендикулярно поверхности соприкосновения тел в сторону от тела, являющегося источником реакции опоры (см. рис. 1.16).

Силы сухого трения возникают при движении одного твердого тела по поверхности другого и всегда направлены в сторону, противоположную относительной скорости движения тел. Силы трения зависят от скоростей движения тел. Эта зависимость графически представлена на рис. 1.17.

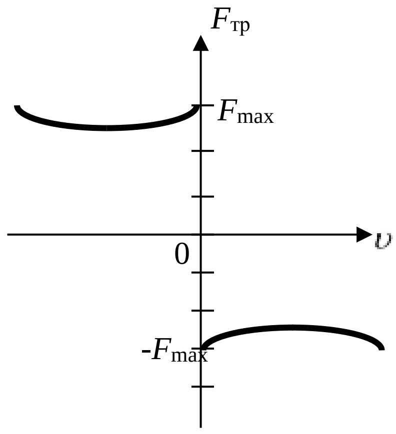

Рис. 1.17

Первая особенность этих сил – существование силы трения покоя (при $\upsilon = 0$, $F_{тр} \neq 0$ и может принимать значения от $-F_{max}$ до $+F_{max}$).

Закон для силы трения покоя: сила трения покоя по абсолютному значению всегда равна сумме проекций внешних сил на касательную к поверхности соприкосновения тел, но не может превышать некоторого максимального значения F_{max}.

При возникновении проскальзывания тел сила трения покоя переходит в силу трения скольжения, которая при малых скоростях движения почти не отличается от максимального значения силы трения покоя (см. рис. 1.17).

Закон для силы трения скольжения (Кулона – Амонтона): при малых скоростях движения сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления (реакции опоры):

$$F_{тр}^{ск} \approx F_{тр}^{max} = \mu \cdot N, \qquad (1.49)$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от материала, качества обработки и состояния трущихся поверхностей.

Закон для силы трения качения: при малых скоростях движения сила трения качения прямо пропорциональна силе нормального давления (реакции опоры) и обратно пропорциональна радиусу кривизны поверхности катящегося тела:

$$F_{\text{тр}}^{\text{кач}} = \frac{\mu_k}{R} N, \tag{1.50}$$

где μ_k – коэффициент трения качения; R – радиус кривизны поверхности катящегося тела; $\frac{\mu_k}{R}$ при решении задач часто обозначают одной буквой k и называют коэффициентом сопротивления.

Силы вязкого трения (сопротивления) возникают между слоями жидкости или газа, а также при движении твёрдых тел в этих средах. Силы сопротивления, действующие со стороны жидкости (газа) на движущееся или обтекаемое тело, по характеру зависимости от скорости существенно отличаются от сил сухого трения (см. рис. 1.18). Во-первых, в этом случае не существует силы трения покоя (при $\upsilon = 0$, $F_{\text{с}} = 0$). Во-вторых, зависимостью силы сопротивления от скорости нельзя пренебречь даже при малых скоростях движения.

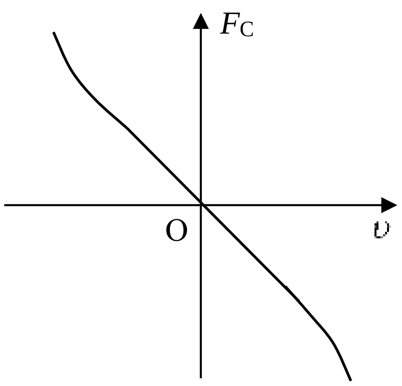

Рис. 1.18

Закон Стокса: при малых скоростях движения тел в вязкой среде сила сопротивления пропорциональна скорости и противоположно ей направлена:

$$F_{\text{с}} = -b\upsilon. \tag{1.51}$$

где b – коэффициент сопротивления, зависящий от вязких свойств среды (η), формы тела (обтекаемости) и линейных поперечных размеров тела. Например, для тел сферической формы $b = 6\pi\eta r$; η – коэффициент вязкости зависит от химического состава вещества и его температуры (табличная величина), причём для жидкостей повышение температуры приводит к уменьшению коэффициента вязкости, а в разряженных газах – наоборот, к его увеличению.

Как видно из рис. 1.18, закон Стокса (линейная зависимость между $F_с$ и υ) выполняется при малых скоростях движения, когда течение жидкости (газа) можно считать ламинарным (безвихревым). При скоростях, приближающихся к скорости звука в среде, возникает турбулентность, и зависимость силы от скорости становится квадратичной.

Особенности потенциальных сил. Потенциальная энергия взаимодействия тел. Все силы делятся на два класса: потенциальные (консервативные) силы и непотенциальные (диссипативные) силы. Основным признаком потенциальных сил является то, что они однозначно определяются взаимным расположением взаимодействующих тел и не зависят от скоростей их движения. Действие этих сил не приводит к превращению механической энергии в другие виды. Среди механических сил к потенциальным относятся гравитационные, в том числе сила тяжести, и упругие, подчиняющиеся закону Гука. Среди немеханических сил потенциальными являются электростатические (кулоновские) силы. Непотенциальные силы зависят от скоростей движения тел и других факторов, не связанных со взаимным расположением тел, их действие сопровождается переходом механической энергии в другие формы энергии (например, в тепловую). Типично непотенциальными являются все силы трения.

Рассмотрим особенности работы потенциальных сил. Используя определение работы силы ($A = \int_{S_1}^{S_2} F_S dS$) и законы для разных видов потенциальных сил, в частности, закон для силы тяжести ($F_{тяж} = mg$), закон Всемирного тяготения ($F_{гр} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$) и закон Гука ($F = -kx$), можно получить следующие формулы:

– работа силы тяжести:

$$A = -(mgh_2 - mgh_1); \qquad (1.52)$$

– работа гравитационной силы:

$$A = -\left[\left(-\gamma\frac{Mm}{r_2}\right) - \left(-\gamma\frac{Mm}{r}\right)\right]; \qquad (1.53)$$

– работа силы упругости:

$$A = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right). \qquad (1.54)$$

В этих формулах h_1 и h_2 – высота тела над поверхностью Земли в начальном и конечном состоянии;

r_1 и r_2 – расстояние между взаимодействующими телами в начальном и конечном состоянии;

x_1 и x_2 – абсолютная деформация тела в начальном и конечном состоянии.

Обратим внимание, что в полученные выражения не входит реальный путь S, пройденный телом по траектории. ***Работа потенциальных сил*** *определяется только положением начальной и конечной точек перемещения, то есть не зависит от формы траектории.*

Из рассматриваемых уравнений следует ещё одна особенность этих сил, а именно: *работа потенциальных сил, при перемещении тела по замкнутой траектории равна нулю* (так как при этом $h_1 = h_2$, $r_1 = r_2$ и $x_1 = x_2$).

Из сравнения уравнений видно, что все они имеют конструкцию вида: $A = -\left(W_{P_2} - W_{P_1}\right)$, где W_P – некоторая функция, характеризующая состояние взаимодействующих тел в данный момент времени, однозначно определяемая взаимным расположением тел и зависящая от физической природы взаимодействия. Её принято называть потенциальной энергией взаимодействия тел. Таким образом, выявляется еще одна особенность потенциальных сил.

Работа потенциальных сил *равна убыли потенциальной энергии системы взаимодействующих тел*:

$$A = -\left(W_{P_2} - W_{P_1}\right). \qquad (1.55)$$

Сравнивая (1.55) последовательно с каждым из уравнений (1.52), (1.53), (1.54), получаем способ вычисления потенциальной энергии в частных случаях:

$W_P^{\text{гр}} = -\gamma \dfrac{Mm}{r} + c$ – ***потенциальная энергия гравитационного взаимодействия*** тел (в общем случае);

$W_P^{\text{тяж}} = mgh + c$ – ***потенциальная энергия в поле силы тяжести Земли*** (гравитационного взаимодействия тела с Землей вблизи поверхности Земли);

$W_P^{\text{упр}} = \dfrac{kx^2}{2} + c$ – ***потенциальная энергия упруго деформированного тела.***

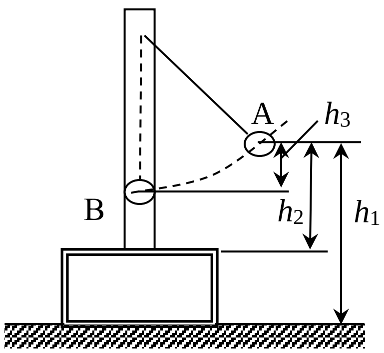

Рис. 1.19

Потенциальная энергия определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной *c,* зависящей от выбора нулевой точки отсчёта, например, для колеблющегося тела в положении *A* его потенциальная энергия может вычисляться как mgh_1 если считать что она равна нулю, когда тело находится на полу лаборатории (см. рис. 1.19). Эту энергию можно вычислить как mgh_2, если за нулевую точку принять поверхность стола. Но чаще всего в этой ситуации считают, что потенциальная энергия колеблющегося тела равна нулю в тот момент, когда оно проходит через положение равновесия (точка *B*), тогда в положении *A*: $W_P = mgh_3$. Выбор нулевой точки для потенциальной энергии не влияет на конечный результат задачи, поскольку при рассмотрении движения мы всегда имеем дело с изменением положения тела, то есть с Δh, которое будет иметь одно и то же значение при любом выборе начала отсчёта.

Представив в дифференциальной форме уравнение (1.55) как $dA = -dW_P$ и работу на бесконечно малом перемещении как $dA = F_r dr$, получаем при сравнении этих выражений, что

$$F_r = -\frac{dW_P}{dr}. \tag{1.56}$$

Проекция силы на направление r *равна скорости изменения потенциальной энергии, когда тело переходит от одной точки к другой в заданном направлении. Знак минус показывает, что сила направлена в сторону убывания потенциальной энергии.*

Если некоторая величина изменяется при переходе от одной точки пространства к другой, то говорят, что существует *градиент* данной величины.

Связь силы с потенциальной энергией: потенциальная сила равна градиенту потенциальной энергии с обратным знаком.

В векторной форме это записывается так:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, W_P. \tag{1.57}$$

1.4. Описание движения системы взаимодействующих тел

Основная задача, возникающая при переходе от описания движения одного тела к описанию движения системы взаимодействующих тел, состоит в нахождении таких законов, которые характеризуют поведение системы в целом, но отличаются от законов, характеризующих поведение каждого отдельного тела, входящего в систему. Например, при взаимодействии тел внутри системы механическая энергия каждого тела может изменяться, но при определённых условиях полная энергия всех тел системы может оставаться неизменной. Совокупность таких законов даёт мощный математический аппарат, позволяющий предсказывать поведение системы, не вникая в детали взаимодействия тел: вместо нескольких уравнений для каждого тела отдельно мы получаем одно уравнение для системы в целом.

1.4.1. Понятийный аппарат

Среди введённых ранее величин, описывающих механическое состояние отдельного тела, существуют величины, обладающие свойством *аддитивности* и не обладающие этим свойством. К аддитивным величинам относятся масса, момент инерции, энергия. Это значит, что

$m_{\text{сист}} = \sum m_i$ – *масса системы* равна сумме масс тел, образующих систему;

$I_{\text{сист}} = \sum I_i$ – *момент инерции* системы равен сумме моментов инерции тел, образующих систему;

$W_{\text{сист}} = \sum W_i$ – *механическая энергия системы* равна сумме механических энергий всех тел, образующих систему;

$\vec{P}_{\text{сист}} = \sum \vec{P}_i$ – *импульс системы* равен векторной сумме импульсов всех тел, образующих систему;

$\vec{L}_{\text{сист}} = \sum \vec{L}_i$ – *момент импульса системы* равен векторной сумме моментов импульсов всех тел, образующих систему.

$W_{\text{сист}} = W_k^{\text{пост}} + W_k^{\text{вр}} + W_p$ – *полная механическая энергия системы* складывается из кинетической энергии поступательного и вращательного движений и потенциальной энергии взаимодействия тел, образующих систему.

Для описания положения системы тел в пространстве вводится понятие *центр масс* (или *центр инерции*). Радиус-вектор $\vec{r}_C$, задающий положение центра масс системы относительно некоторой точки О, принятой за начало отсчёта, определяется правилом:

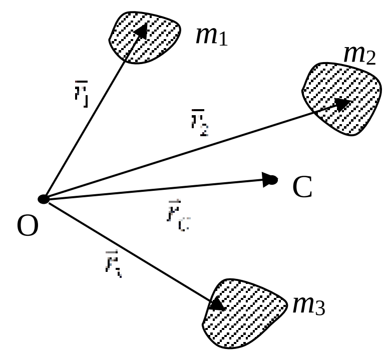

Рис. 1.20

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \tag{1.58}$$

при этом радиус-векторы, определяющие положение отдельных частей системы, должны отсчитываться от той же точки О (рис. 1.20).

Центры масс однородных тел (для которых плотность вещества одинакова во всех точках) совпадают с их геометрическим центром. Центр масс может лежать вне тела (например, центр масс кольца).

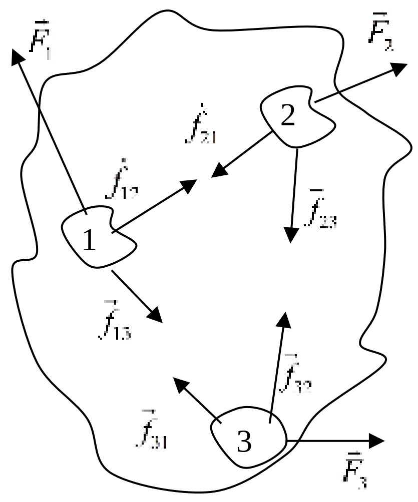

Рис. 1.21

Внутренние силы ($\vec{f}_{ij}$) – силы, действующие между телами, входящими в систему (см. рис. 1.21).

Внешние силы ($\vec{F}_i$) – силы, действующие на тела системы со стороны других тел, не входящих в рассматриваемую систему.

Замкнутая система – система, на которую не действуют внешние силы или их векторная сумма равна нулю, или их действием можно пренебречь по сравнению с внутренними силами. (При формулировке законов сохранения это понятие будет уточняться в связи с особенностями рассматриваемой ситуации).

Консервативная система – система, внутри которой действуют только потенциальные силы (гравитационные, упругие, электростатические).

1.4.2. Основные законы для системы взаимодействующих тел

Теорема о движении центра масс системы. Можно дать несколько словесных формулировок этой теоремы:

- ускорение центра масс системы определяется только внешними силами, действующими на систему.
- центр масс системы движется так, как двигалась бы материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы, и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.
- внутренние силы не могут изменить состояние движения центра масс системы.

Математически теорема о движении центра масс записывается в виде:

$$\sum \vec{F}_i = m_{\text{сист}} \vec{a}_C. \tag{1.59}$$

Закон изменения импульса: изменение суммарного импульса всех тел, образующих систему, равно сумме импульсов внешних сил, действующих на систему:

$$\Delta\left(\sum \vec{P}_i\right) = \int \vec{F}^{\text{внеш}} dt. \tag{1.60}$$

Закон сохранения импульса: при любых взаимодействиях тел внутри замкнутой системы векторная сумма импульсов тел, образующих систему, остаётся постоянной.

При решении задач закон сохранения импульса предпочтительнее выражать следующим образом: векторная сумма импульсов тел системы в первом состоянии (I) равна векторной сумме импульсов тел системы во втором состоянии (II), если при переходе системы из первого состояния во второе на систему не действовали внешние силы, или их векторная сумма оказалась равной нулю (то есть, если система оставалась замкнутой):

$$\left(\sum \vec{P}_i\right)_I = \left(\sum \vec{P}_i\right)_{II}. \tag{1.61}$$

Закон изменения момента импульса: изменение суммарного момента импульса всех тел, образующих систему, равно сумме импульсов моментов внешних сил, действующих на систему:

$$\Delta\left(\sum \vec{L}_i\right)_I = \int \vec{M}^{\text{внеш}} dt_{II}. \tag{1.62}$$

Закон сохранения момента импульса: при любых взаимодействиях тел внутри замкнутой системы векторная сумма моментов импульсов тел, образующих систему, остаётся постоянной.

При решении задач закон сохранения момента импульса предпочтительнее выражать следующим образом: векторная сумма моментов импульсов тел системы в первом состоянии (I) равна векторной сумме моментов импульсов тел системы во втором состоянии (II), если при переходе системы из первого состояния во второе на систему не действовали внешние силы, или векторная сумма моментов этих сил оказалась равной нулю (то есть, если система оставалась замкнутой):

$$\left(\sum \vec{L}_i\right)_I = \left(\sum \vec{L}_i\right)_{II}. \qquad (1.63)$$

Закон изменения полной механической энергии: изменение полной механической энергии системы определяется суммой работ внешних и внутренних непотенциальных сил:

$$\Delta\left(W_k^{\text{сист}} + W_p^{\text{сист}}\right) = A^{\text{внеш}} + A^{\text{внутр. непот.}}. \qquad (1.64)$$

Отсюда следует, что действие потенциальных сил не приводит к изменению полной механической энергии системы. Если на тела системы действуют только потенциальные силы, то может происходить переход кинетической энергии в потенциальную и обратно, но механическая энергия при этом не переходит в другие виды (например, в тепловую).

Закон сохранения полной механической энергии: полная механическая энергия системы остаётся постоянной, если работа внешних сил равна нулю (то есть, система замкнутая) и внутри системы действуют только потенциальные силы или работа непотенциальных сил равна нулю (то есть система консервативная):

$$\left(W_k^{\text{пост.}} + W_k^{\text{вр.}} + W_p\right)_I = \left(W_k^{\text{пост.}} + W_k^{\text{вр.}} + W_p\right)_{II}. \qquad (1.65)$$

1.5. Примеры решения задач по механике

Пример 1. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где A = 10 рад, B = 20 рад/с, C = –2 рад/с^2. Найти скорость и ускорение точки, находящейся на расстоянии r = 0,1 м от оси вращения, для момента времени t = 4 с. Показать векторы скорости и ускорения на рисунке.

Решение. В данной задаче рассматривается вращательное движение вокруг неподвижной оси, где по известному закону изменения угла поворота необходимо найти изменения с течением времени других кинематических характеристик и их значение в заданный момент времени. Скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется по формуле $\upsilon = \omega r$, где ω – модуль угловой скорости тела. Угловую скорость ω найдём, взяв первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct. \qquad (1)$$

Полное ускорение точки, движущейся по кривой линии, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории (рис. 1.22): $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

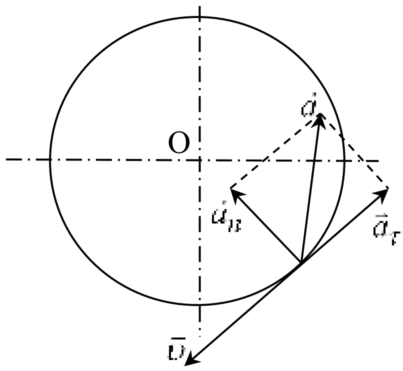

Рис. 1.22

Так как векторы взаимно перпендикулярны, то модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (2)$$

Модули тангенциального и нормального ускорения точки вращающегося тела выражаются формулами:

$$a_\tau = \varepsilon R,\ a_n = \omega^2 R, \qquad (3)$$

где ε – модуль его углового ускорения.

Подставляя выражения a_τ и a_n в формулу (2), находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (4)$$

Проверим, даёт ли полученная формула единицу *a.* Для этого в правую часть формулы (4) вместо величин подставим их единицы измерения:

$$[a]=[м]\sqrt{\left([1/с^2]^2+[1/с]^4\right)}=м/с^2.$$

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости (1) по времени:

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=2C=-4\ \text{рад/с}^2.$$

Вектор касательного ускорения направлен против скорости, т. к. угловое ускорение $\varepsilon<0$.

Найдём значение скорости и ускорения точки, находящейся на расстоянии r = 0,1 м от оси вращения, для момента времени t = 4 с. В момент времени t = 4 с модуль угловой скорости

$$\omega=[20+2(-2)4]=4\ \text{рад/с}.$$

Скорость точки υ = 4 · 0,1 = м/с.

Подставляя значения ω, ε и r в формулу (4), получаем

$$a=0{,}1\sqrt{(-4)^2+4^4}=1{,}65\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: υ = 0,4 м/с, a = 1,65 м/с^2.

Пример 2. Материальная точка движется в соответствии с уравнениями:

$$x = A + Bt + Ct^3,\ y = Kt + Lt^2, \qquad (1)$$

где A = 3 м, B = 1 м/с, C = –1 м/с^3, K = 1,5 м/с, L = 2 м/с^2.

Найти координаты, скорость и ускорение точки в момент времени t=1 с.

Решение. В задаче рассматривается поступательное движение, где по известному закону изменения движения необходимо найти изменения с течением времени других кинематических характеристик и их значение в заданный момент времени. В данной задаче закон движения задан не вдоль траектории, а в проекциях на координатные оси.

Проекции мгновенной скорости точки на оси x, y есть первые производные от координат (1) по времени:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2,\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = K + 2Lt. \qquad (2)$$

Полная скорость находится выражением $\upsilon = \sqrt{(\upsilon_x)^2 + (\upsilon_y)^2}$.

Проекции ускорения точки найдём, взяв первые производные от проекций скорости (2) по времени:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = 6Ct,\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = 2L. \qquad (3)$$

Модуль ускорения точки $a = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$.

Найдём координаты, скорость и ускорение точки в момент времени t = 1 с. Координаты точки найдём, подставив в уравнения движения (1) числовые значения коэффициентов *A, B, C, K, L* и времени *t*:

$$x = 3 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1^3 = 3,\ y = 1{,}5\cdot 1 + 2\cdot 1^2 = 3{,}5.$$

При t = 1 с, $\upsilon_x = 1 + 3(-1)\cdot 1^2 = -2$; $\upsilon_y = 1{,}5 + 2\cdot 2\cdot 1 = 5{,}5$. Модуль скорости $\upsilon = \sqrt{(\upsilon_x)^2 + (\upsilon_y)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (5{,}5)^2} = 5{,}85$ м/с.

При t = 1 с $a_x = -6$ м/с^2, $a_y = 4$ м/с^2, $a = \sqrt{(-6)^2 + (4)^2} = 7{,}21$ м/с^2.

Ответ: x = 3 м, y = 3,5 м, υ = 5,85 м/с, a = 7,21 м/с^2.

Пример 3. Материальная точка брошена с начальной скоростью $\upsilon_0 = 30$ м/с под углом α = 60° к горизонту. Найти скорость точки и радиус кривизны траектории в момент времени t_1 = 2 с.

Решение. В задаче рассматривается сложное криволинейное движение тела в поле силы тяжести Земли. На основании принципа независимости движений его можно представить состоящим из двух движений – по горизонтали (по оси *x*) и по вертикали (по оси *y*). Характер поступательного движения определяется на основе II закона Ньютона, а конкретные параметры движения на основе кинематических законов.

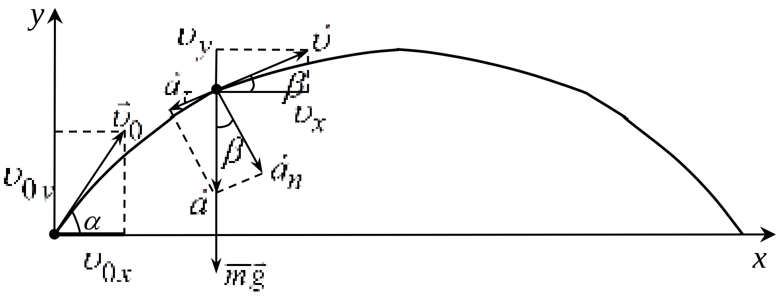

Рис. 1.23

II закон Ньютона: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. На материальную точку действует единственная сила – сила тяжести: $\vec{F} = m\vec{g}$.

В проекциях на координатные оси:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_x = m(\vec{a})_x; \\ (m\vec{g})_y = m(\vec{a})_y. \end{cases}$$

По рис. 1.23 видно, что $(m\vec{g})_x = 0$, $(m\vec{g})_y = -mg$, тогда $a_x = 0$ – это движение по оси x равномерное, $a_y = -g = const$ – движение по оси y равнопеременное.

Запишем кинематические законы для этих видов движения:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha = const; \\ x = \upsilon_{0x} \cdot t. \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt; \\ y = \upsilon_{0y} t - \dfrac{1}{2} g t^2. \end{cases} \qquad (1)$$

Модуль скорости определяется выражением:

$$\upsilon = \sqrt{(\upsilon_x)^2 + (\upsilon_y)^2} = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2 + (\upsilon_0 \sin\alpha - gt)^2}. \qquad (2)$$

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a_y = g. \qquad (3)$$

По рис. 1.23 определяем $a_n = a \cdot \cos\beta$, где β – угол между полным ускорением и нормальным ускорением в момент времени t_1, а также получаем, что $\cos\beta = \dfrac{\upsilon_x}{\upsilon}$.

По определению нормальное ускорение точки равно $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R}$. Тогда радиус кривизны траектории $R = \dfrac{\upsilon^2}{a_n} = \dfrac{\upsilon^2}{a\cos\beta} = \dfrac{\upsilon^2 \upsilon}{g\upsilon_x}$.

$$R = \frac{\upsilon^3}{g \cdot \upsilon_x}. \quad (4)$$

Проверим, даёт ли полученная формула единицу *R*. Для этого в правую часть формулы (4) вместо величин подставим их единицы измерения:

$$[R] = \frac{[\text{м/с}]^3}{[\text{м/с}^2][\text{м/с}]} = \text{м}.$$

Определим скорость точки и радиус кривизны траектории в момент времени t_1= 2 с:

$$\upsilon = \sqrt{(\upsilon_x)^2 + (\upsilon_y)^2} = \sqrt{(30\cos 60)^2 + (30\sin 60 - 9{,}8 \cdot 2)^2} = \sqrt{(15)^2 + (6{,}38)^2} =$$
$$= 16{,}3 \text{ м/с}.$$

$$R = \frac{16{,}3^3}{9{,}8 \cdot 15} = 29{,}46 \text{ м}$$

Ответ: υ = 16,3 м/с, *R* = 29,46 м.

Пример 4. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу $m_б = 80$ г (см. рис. 1.24), перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы с массами m_1 = 100 г и m_2 = 200 г. Определить ускорение, с которым будут двигаться грузы, самопроизвольно. Трением и массой нити пренебречь.

Решение. В данной задаче рассматривается движение тел относительно поверхности Земли. Систему отсчёта связанную с Землей можно считать инерциальной, и в ней применимы законы Ньютона. В движении участвуют три тела. Грузы массами m_1 и m_2 движутся поступательно, а блок вращается.

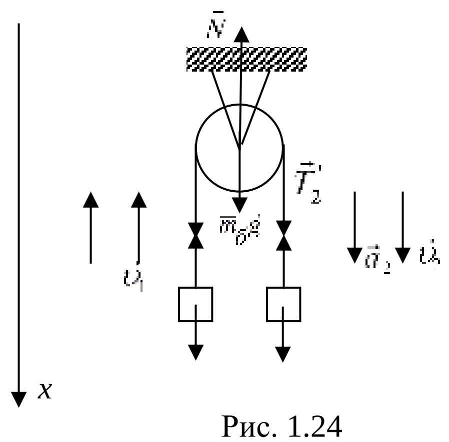

Рис. 1.24

Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел. На грузы действуют силы со стороны Земли – $\vec{m}_1 g$ и $\vec{m}_2 g$, и со стороны нити – $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$.

Если нить не проскальзывает по блоку, то можно считать, что вращение блока вызывается действием сил натяжения нити $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$, причём во всех точках слева от блока натяжение нити можно считать одинаковым (так как нить по условию невесомая), поэтому по численному значению $T_1' = T_1$ и, аналогично, справа от блока $T_2' = T_2$. Кроме того на блок действует сила тяжести $\overrightarrow{m_б g}$ и сила реакции опоры (сила упругости со стороны оси) $\vec{N}$.

Когда система состоит из нескольких тел, уравнение II закона Ньютона записывается для каждого тела в отдельности:

– для тела m_1 в проекции на ось x:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1; \tag{1}$$

– для тела m_2 в проекции на ось x:

$$m_2 g - T_2 = -m_2 a_2; \tag{2}$$

– для блока:

$$m_б g + T_1 + T_2 - N = 0 \text{ (блок поступательно не движется).} \tag{3}$$

Чтобы записать II закон Ньютона для вращательного движения блока, рассмотрим моменты сил, действующих на блок, приняв направление вдоль оси вращения «от нас» за положительное направление оси *z*.

Линии действия сил $\overrightarrow{m_б g}$ и $\vec{N}$ проходят через ось вращения, следовательно, их моменты равны нулю. Момент силы T_1 в проекции на ось *z*: $M_{T_1} = -T_1 R$. Момент силы T_2 в проекции на ось z: $M_{T_2} = T_2 R$, где R – радиус блока.

Таким образом, II закон Ньютона для вращательного движения блока:

$$T_2 R - T_1 R = J\varepsilon, \tag{4}$$

где J – момент инерции блока как сплошного диска равен $J = \frac{1}{2} m_б R^2$.

Движения тел не являются независимыми. Так, из условия нерастяжимости нити следует, что $a_1 = a_2 = a$, из условия отсутствия проскальзывания нити по блоку тангенциальное ускорение точек блока в месте соприкосновения с нитью равно ускорению нити и груза, тогда $\varepsilon = a/R$.

Уравнение (4) с учётом выражений для J и ε:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_б a, \tag{5}$$

вычитая из (2) (1) с учётом (5) получим:

$$(m_2 - m_1)g - \frac{1}{2} m_б a = (m_1 + m_2)a,$$

отсюда

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + (1/2)m_б}. \tag{6}$$

Проверим полученную формулу по размерности:

$$[a] = \frac{[\text{кг}]\left[\text{м/с}^2\right]}{[\text{кг}]} = \text{м/с}^2$$

После подстановки числовых значений в формулу (6) получим

$$a = \frac{(0{,}2 - 0{,}1)}{(0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}08/2)} \cdot 9{,}81 = 2{,}88 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: a = 2,88 м/с^2.

Пример 5. Автомобиль массой $m = 2000$ кг движется с постоянной скоростью $\upsilon = 10$ м/с по выпуклому мосту, радиус кривизны которого 90 м. Найти силу давления автомобиля на мост в точке, положение которой задаётся углом $\alpha = 60^\circ$ (см. рис. 1.25)

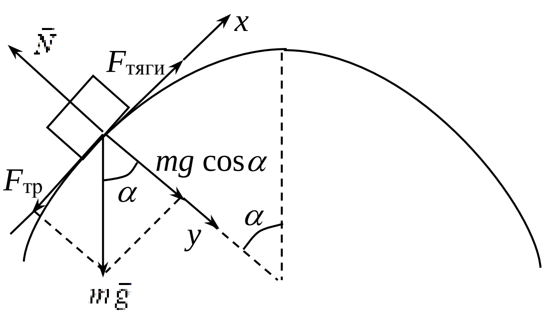

Рис. 1.25

Решение. В задаче рассматривается криволинейное поступательное движение. Выберем координатные оси так, чтобы они в любой момент времени совпадали с касательной и нормалью к траектории. Так как автомобиль движется с постоянной скоростью, $a_\tau = 0$ и сумма проекций сил тяжести, тяги и трения на касательную к траектории тоже равна нулю. Полное ускорение, таким образом, сводится к нормальной составляющей, которая направлена вдоль радиуса к центру кривизны и определяется суммой проекций силы mg и силы реакции опоры на ось y. (Силы тяги и трения не имеют проекций на эту ось). Запишем II закон Ньютона в виде $\sum F_y = ma_y$:

$$mg\cos\alpha - N = m\frac{V^2}{R}, \tag{1}$$

откуда

$$N = m\left(g\cos\alpha - \upsilon^2 / R\right).$$

Искомая сила давления автомобиля на мост связана с силой реакции N третьим законом Ньютона и по численному значению равна N :

$$F_Д = m\left(g\cos\alpha - \upsilon^2 / R\right). \tag{2}$$

Проверим исходную формулу по размерности:

$$[F] = [\text{кг}]\cdot\left(\left[\text{м/с}^2\right]^2 - [\text{м/с}]^2/[\text{м}]\right) = [\text{кг}]\left[\text{м/с}^2\right] = \text{Н}.$$

Вычислим силу давления автомобиля:

$$F = 2000(9{,}8\cos60^\circ - 10^2/90) = 7600\text{Н} = 7{,}6\ \text{кН}.$$

Ответ: $F = 7{,}6$ кН.

Пример 6. Маховик в виде сплошного диска радиусом R = 0,2 м и массой m = 50 кг раскручен до частоты вращения n_1 = 480 мин$^{-1}$ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через t = 50 с. Найти момент M сил трения.

Решение. В задаче рассматривается вращательное движение маховика под действием силы трения. Для решения воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения в виде

$$dL_z = M_z dt, \qquad (1)$$

где dL_z – изменение проекции на ось *z* момента импульса маховика, вращающегося относительно оси *z*, совпадающей с геометрической осью маховика, за интервал времени dt; M_z – момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси *z*.

Момент сил трения можно считать не изменяющимся с течением времени ($M_z = const$), поэтому интегрирование уравнения (1) приводит к выражению

$$\Delta L_z = M_z \Delta t. \qquad (2)$$

При вращении твёрдого тела относительно неподвижной оси изменение проекции момента импульса

$$\Delta L_z = J_z \Delta\omega, \qquad (3)$$

где J_z – момент инерции маховика относительно оси *z*; $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости маховика.

Приравняв правые части равенств (2) и (3), получим $M_z \Delta t = J_z \Delta\omega$, откуда

$$M_z = J_z \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (4)$$

Момент инерции маховика в виде сплошного диска определяется по формуле

$$J_z = \frac{1}{2} m r^2. \qquad (5)$$

Изменение угловой скорости $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ выразим через конечную n_2 и начальную n_1 частоты вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi(n_2 - n_1). \qquad (6)$$

Подставив в формулу (4) выражения J_z (5) и $\Delta\omega$ (6), получим

$$M_z = \pi m R^2 (n_2 - n_1)\frac{1}{\Delta t}. \qquad (7)$$

Проверим, даёт ли расчётная формула единицу момента силы (Нм). Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[\mathrm{m}][\mathrm{R}^2][\mathrm{n}]}{[\mathrm{t}]} = \frac{1\,\text{кг}\cdot 1\text{м}^2\cdot 1\text{с}^{-1}}{1\text{с}} = 1\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\cdot 1\,\text{м} = 1\,\text{Нм}.$$

Подставим в (7) числовые значения величин и произведем вычисления, учитывая, что n_1 =480 мин$^{-1}$ $= \frac{480}{60}$ с$^{-1}$=8 с$^{-1}$:

$$M_z = \frac{3{,}14\cdot 50\cdot (0{,}2)^2\cdot (0-8)}{50} = -1\ \text{Нм}.$$

Знак минус показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

Ответ: $M_z = -1$ Нм.

Пример 7. Снаряд, летевший горизонтально со скоростью $\upsilon = 100$ м/с, разрывается на две равные части на высоте $H = 40$ м. Одна часть падает через время $t = 1$ с на землю точно под местом взрыва. Определить величину и направление скорости второй части снаряда сразу после взрыва.

Решение. В данной задаче рассматривается поступательное движение, и взаимодействие тел образующих систему снаряд – две его части. Обозначим массу одной части − m, тогда масса снаряда − $2m$. Внешние силы по отношению к этой системе − это сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Внутренние силы, возникающие при взрыве, не являются потенциальными, а по величине много больше, чем внешние, поэтому в интервале времени действия внутренних сил систему можно считать замкнутой, но не консервативной. Тела, образующие систему, движутся поступательно, поэтому применим закон сохранения импульса.

I состояние – две части снаряда движутся как одно целое со скоростью υ. $\sum \vec{P}_i = 2m\vec{\upsilon}$ – вектор $\vec{\upsilon}$ направлен горизонтально.

II состояние – сразу после взрыва первая часть снаряда получает скорость $\vec{U}_1$, направленную вертикально вниз, а вторая часть – скорость $\vec{U}_2$, направление которой нужно определить

$$\sum \vec{P}_2 = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2.$$

На основании закона сохранения импульса $\sum \vec{P}_1 = \sum \vec{P}_2$:

$$2m\vec{\upsilon} = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2. \qquad (1)$$

Направление векторов $2m\vec{\upsilon}$ и $m\vec{U}_1$ известно по условию, на основании (1) вектор $m\vec{U}_2$ следует построить таким образом, чтобы в сумме с $m\vec{U}_1$ он дал вектор $2m\vec{\upsilon}$.

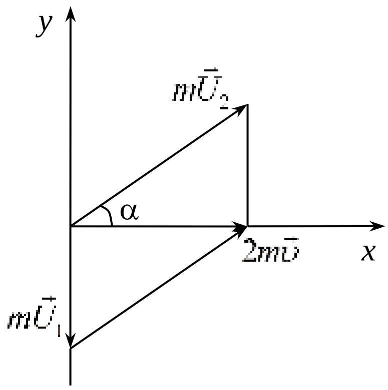

Рис. 1.26

Дальнейшее решение можно вести в проекциях на координатные оси или воспользоваться соотношением между модулями векторов на основании рис. 1.26 (векторы образуют прямоугольный треугольник)

$$(mU_2)^2 = (2m\upsilon)^2 + (mU_1). \qquad (2)$$

Из (2) следует, что

$$U_2 = \sqrt{4\upsilon^2 + U_1^2}. \qquad (3)$$

Из рис. 1.26 $tg\alpha = \dfrac{mU_1}{2mV}$ $\alpha = \mathrm{arctg}(U_1 / 2\upsilon)$.

После прекращения действия взрывных сил части снаряда движутся под действием силы тяжести (без учёта сопротивления воздуха). Первая часть снаряда движется вертикально вниз с постоянным ускорением g, поэтому $H = U_1 t + \dfrac{gt^2}{2} \Rightarrow U_1 = \dfrac{H - gt^2/2}{t}$, с учётом числовых данных

$$U_1 = \frac{40-5}{1} = 35 \text{ м/с},$$

$$U_2 = \sqrt{4 \cdot 100^2 + 35^2} = 202 \text{ м/с},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{35}{200} \approx 10^\circ.$$

Ответ: $U_1 = 35$ м/с; $\alpha \approx 10^\circ$.

Пример 8. Платформа в виде сплошного диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1 = 180 кг вращается около вертикальной оси с частотой n = 10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой m_2 = 60 кг. Какую линейную скорость υ относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдёт на край платформы?

Решение. В данной задаче рассматривается вращательное движение и взаимодействие тел, образующих систему «платформа – человек». Внешними по отношению к этой системе являются силы тяжести и реакции оси, но линия их действия проходит через ось вращения. Момент этих сил равен нулю, следовательно, систему можно считать замкнутой по отношению к закону сохранения момента импульса. Выделим два состояния: I состояние – человек находится в центре платформы и вся система вращается с угловой скоростью $\omega = 2\pi n$. II состояние – человек находится на краю платформы и вся система вращается с угловой скоростью $\omega' = \upsilon / R$, где υ – скорость человека относительно пола. Так как ось вращения неподвижна, то векторы момента импульса тел в I и во II состоянии направлены по одной прямой (вдоль оси) и закон сохранения момента импульса можно сразу писать в проекции на эту ось (z):

$$\sum L_{z1} = \sum L_{z2}\,. \qquad (1)$$

По определению: $L_z = J_z \omega$, где J_z – момент инерции платформы с человеком относительно оси z; ω – угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому в I состоянии $J_z = J_1 + J_2$, а во II состоянии $J'_z = J'_1 + J'_2$.

С учётом этого равенство (1) примет вид:

$$(J_1 + J_2)\omega = (J_1' + J_2')\omega, \qquad (2)$$

где значения моментов инерции J_1 и J_2 платформы и человека, соответственно, относятся к I состоянию системы; J_1' и J_2' – ко II состоянию системы.

Момент инерции платформы относительно оси z при переходе человека не изменяется:

$$J_1 = J_1' = \frac{1}{2}m_1R^2.$$

Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции J_2 в I состоянии (в центре платформы) можно считать равным нулю. Во II состоянии (на краю платформы) момент инерции человека $J_2' = m_2R^2$.

Подставим в формулу (2) выражения моментов инерции и угловой скорости вращения платформы с человеком в I и во II состоянии:

$$\left(\frac{1}{2}m_1R^2 + 0\right)2\pi n = \left(\frac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2\right)\frac{\upsilon}{R}. \qquad (3)$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость:

$$\upsilon = \frac{2\pi nRm_1}{m_1 + 2m_2}. \qquad (4)$$

Проверим, даёт ли расчётная формула (4) единицу скорости (м/с). Для этого в правую часть формул вместо символов величин подставим их единицы:

$$[\upsilon] = \frac{[\mathrm{n}][\mathrm{R}][\mathrm{m}]}{[\mathrm{m}]} = \frac{\left[\mathrm{c}^{-1}\right][\mathrm{м}][\mathrm{кг}]}{[\mathrm{кг}]} = \mathrm{м/с}$$

Произведём вычисления: $\upsilon = \dfrac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1/6 \cdot 1{,}5 \cdot 180}{180 + 2 \cdot 60} = 1$ м/с.

Ответ: $\upsilon = 1$ м/с.

Пример 9. Ящик массой m_1 = 20 кг соскальзывает по лотку длиной l = 2 м с коэффициентом трения μ=0,1 на неподвижную тележку с песком и застревает в нём. Тележка с песком массой m_2 = 80 кг может свободно (без трения) перемещаться по рельсам в горизонтальном направлении. Определить скорость и тележки с ящиком, если лоток наклонён под углом α = 30° к рельсам.

Решение. В данной задаче рассматривается поступательное движение двух систем взаимодействующих тел «ящик – лоток – Земля» и «ящик – тележка». Рассмотрим систему «ящик – лоток – Земля». Внешних по отношению к этим системам сил нет. Внутренними являются сила тяжести $G_1 = m_1g$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Силы тяжести и реакции опоры (упругости) являются потенциальными силами, а действие непотенциальных сил трения приводит к превращению механической энергии в другие виды. Следовательно, систему можно считать замкнутой, но не консервативной, а изменение механической энергии системы будет равно работе силы трения $A = F_{\text{тр}} l \cos\beta$, где $F_{\text{тр}} = \mu N_1$, а β – угол между направлением силы трения и направлением перемещения ящика. В данной задаче β=180°, cosβ = –1, следовательно, работа силы трения равна $A = -F_{\text{тр}} l = -\mu N_1 l$.

Сила реакции опоры $\vec{N}_1$, находится из II закона Ньютона $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ в проекциях на ось перпендикулярную лотку (см. рис.1.27). Движения вдоль этой оси нет, поэтому $N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0$. Следовательно, сила трения определяется выражением:

$$F_{\text{тр}} = \mu N_1 = \mu m_1 g \cos\alpha. \qquad (1)$$

Рассмотрим два состояния. I состояние – ящик находится в верхней точке лотка в состоянии покоя $W_{K1} = 0$. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение ящика в конце лотка, тогда

$W_{p1} = m_1 gh$, где $h = l \cdot \sin\alpha$ (из рис. 1.27). II состояние ящик находится в нижней точке лотка $W_{p2} = 0$, но при этом он движется. Кинетическая энергия ящика перед падением на тележку равна $W_{K2} = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2$. Лоток и Земля не меняют своего состояния движения. На основании закона изменения энергии: $(W_{p2} + W_{K2}) - (W_{p1} + W_{K1}) = A$.

$$\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} - m_1 gh = -F_{\text{тр}} l. \qquad (2)$$

Тележку и ящик можно рассматривать как систему двух неупруго взаимодействующих тел. Но эта система не замкнута, так как на неё действуют внешние силы: силы тяжести $G_1 = m_1 g$ и $G_2 = m_2 g$ и сила реакции N (см. рис. 1.27). Поэтому применить закон сохранения импульса в общем к системе «ящик – тележка» нельзя. Однако, так как проекции указанных сил на направление оси x, совпадающей с направлением рельсов, равны нулю, то проекцию импульса системы на это направление можно считать постоянной, т. е.

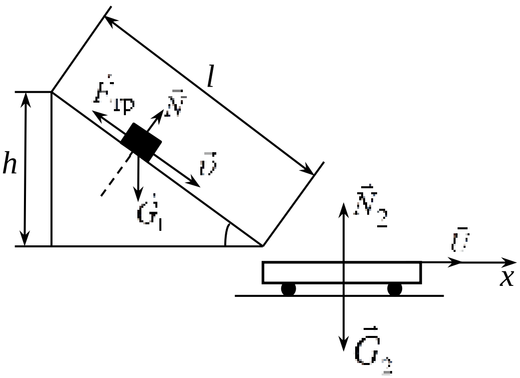

Рис. 1.27

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x}, \qquad (3)$$

где p_{1x} и p_{2x} – проекции импульса ящика и тележки с песком в момент падения ящика на тележку; p'_{1x} и p'_{2x} – те же величины после падения ящика.

Рассматривая тела системы как материальные точки, выразим в равенстве (3) импульсы тел через их массы и скорости, учитывая, что $p_{2x} = 0$ (тележка до взаимодействия с ящиком покоилась), а также что после взаимодействия оба тела системы движутся с одной и той же скоростью:

$$m_1\upsilon_{1x} = (m_1 + m_2)\cdot U\text{, или } m_1\upsilon_1\cos\alpha = (m_1 + m_2)\cdot U, \qquad (4)$$

где υ_1 – модуль скорости ящика перед падением на тележку; $\upsilon_1\cos\alpha$ – проекция этой скорости на ось *x*.

Из (4) следует

$$U = \frac{m_1\upsilon_1\cos\alpha}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Модуль скорости υ_1 определим из выражения (2) с учетом (1)

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)}. \qquad (7)$$

Подставив выражение υ_1 в формулу (5), получим

$$U = \frac{m_1\sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)}\cos\alpha}{m_1 + m_2}. \qquad (8)$$

Проверим, даёт ли полученная формула единицу скорости. Для этого в правую часть формулы (8) вместо величин подставим их единицы измерения:

$$[U] = [\text{кг}]\frac{\left[\text{м/с}^2\right]^{1/2}[\text{м}]^{1/2}}{[\text{кг}]} = \text{м/с}.$$

Вычисляем скорость тележки:

$$U = \frac{20\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2\left(\sin 30^\circ - 0{,}1\cdot\cos 30^\circ\right)}}{20 + 80}\cos 30^\circ = 0{,}61\ \text{м/с}.$$

Ответ: $U = 0{,}61$ м/с^2.

Контрольные вопросы

1. Задачи по механике могут быть связаны с описанием поступательного и вращательного движений одного тела либо системы взаимодействующих тел. При этом используются идеализированные модели объектов: материальная точка, абсолютно твёрдое тело, замкнутая система, консервативная система.

Сформулируйте определения этих понятий.

Почему при описании вращательного движения нельзя представлять тело как материальную точку?

2. Характеристики поступательного и вращательного движений для любой точки тела взаимосвязаны. Изобразите на рисунке тело произвольной формы, укажите положение оси вращения и выделите две точки, находящиеся на разном расстоянии от оси вращения.

Укажите на рисунке направления векторов угловой скорости и линейной скорости каждой точки.

Запишите формулу, связывающую модули этих скоростей.

Сравните угловые и линейные скорости для выделенных точек.

Запишите формулы связи для других кинематических характеристик поступательного и вращательного движений.

3. Ускорение – величина, характеризующая быстроту изменения скорости. При криволинейном поступательном движении полное ускорение принято делить на две составляющие: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$.

Какую информацию об изменении скорости даёт тангенциальное ускорение (a_τ)?

Какую информацию об изменении скорости даёт нормальное ускорение (a_n)?

Что вы можете сказать об особенностях движения, если известно:

а) $a_\tau = 0$, $a_n = 0$;

б) $a_\tau = 0$, $a_n \neq 0$;

в) $a_\tau \neq 0$, $a_n = 0$?

4. Тело движется по дуге окружности. Изобразите на рисунке направления векторов $\vec{a}$, $\vec{a}_\tau$, $\vec{a}_n$ так, чтобы выполнялось равенство, указанное в третьем задании.

Почему для модулей этих векторов не справедливо равенство:
$a = a_\tau + a_n$?

Запишите правильную связь между модулями этих векторов.

5. По условию задачи известно, что модуль тангенциального ускорения убывает по линейному закону.

При каком условии движение тела будет ускоренным, а при каком – замедленным?

Изобразите на рисунке направления векторов скорости и тангенциального ускорения для указанных вариантов движения.

Изобразите примерные графики изменения с течением времени проекций этих векторов на касательную к траектории движения.

6. По определению, модуль скорости находится как первая производная от пути по времени.

С помощью какой математической операции можно решить обратную задачу: по известному закону изменения скорости с течением времени найти положение тела на траектории в произвольный момент времени?

Запишите кинематический закон пути в общем виде и для частных случаев равномерного и равнопеременного движений.

7. По определению, модуль тангенциального ускорения находится как первая производная от модуля скорости по времени.

С помощью какой математической операции можно решить обратную задачу: найти скорость тела в произвольный момент времени?

Запишите кинематический закон скорости в общем виде.

Что должно быть известно по условию задачи, чтобы этим законом можно было воспользоваться для нахождения скорости в произвольный момент времени?

Запишите кинематический закон скорости для частных случаев равномерного и равнопеременного движений.

8. На тело, которое можно принять за материальную точку, действуют одновременно две силы F_1 и F_2 ($F_1 > F_2$). Изобразите на рисунке возможные варианты взаимного расположения векторов этих сил.

Укажите для каждого из вариантов направление равнодействующей этих сил $\vec{F}_{\text{равн.}} = \sum \vec{F}_i$.

В каком случае модуль равнодействующей принимает минимальное значение? Чему равно это значение?

В каком случае модуль равнодействующей принимает максимальное значение? Чему равно это значение?

9. На тело, которое можно принять за материальную точку, действуют одновременно три силы, не совпадающие по направлению. Изобразите эту ситуацию на рисунке.

Используя основной закон динамики (II закон Ньютона), определите направление полного ускорения тела.

Достаточно ли информации о действующих силах, чтобы определить направление скорости тела в произвольной точке траектории?

Сделайте ещё один рисунок, оставив только найденное направление вектора полного ускорения. Добавьте произвольно выбранный отрезок криволинейной траектории движения тела и укажите на рисунке направление скорости движения тела, если известно, что движение было замедленным.

10. Основной закон динамики (II закон Ньютона) в словесной формулировке звучит одинаково для поступательного и вращательного движений: ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально интенсивности внешних воздействий и обратно пропорционально собственным инертным свойствам тела. Но аналитически этот закон записывается по-разному.

Почему для характеристики внешних воздействий на тело при вращательном движении используется не сила, как в поступательном движении, а новая величина, называемая моментом силы?

Какие факторы влияют на модуль момента силы? Запишите формулу для вычисления модуля момента силы и поясните с помощью рисунка все буквенные обозначения.

11. *Почему для характеристики инертных свойств тела при вращательном движении используется не масса, как в поступательном движении, а новая величина, называемая моментом инерции?*

От чего зависит момент инерции тела? Запишите формулы, определяющие моменты инерции тел разной формы относительно оси вращения, проходящей через центр масс.

Какая теорема позволяет находить момент инерции тела относительно произвольной оси, если известен момент инерции этого тела относительно оси, параллельной данной, но проходящей через центр масс? Сформулируйте эту теорему словесно и запишите аналитически.

12. Если тело движется под действием некоторой силы, совершается работа, в результате чего может изменяться положение тела на траектории и его скорость.

Запишите формулы, связывающие

– работу с действующей силой и расстоянием, пройденным телом под действием этой силы (поясните на рисунке буквенные обозначения);

– работу силы с изменением скорости тела (с изменением его кинетической энергии).

Запишите аналогичные формулы для работы момента силы, действующего на тело при вращательном движении.

13. Все силы делятся на две группы: потенциальные (консервативные) силы и непотенциальные (диссипативные) силы.

Назовите силы, которые являются потенциальными. Сформулируйте законы для этих видов сил.

Приведите примеры непотенциальных сил. Сформулируйте законы для этих видов сил.

Укажите особенности работы потенциальных сил.

Запишите формулы, связывающие работу разных потенциальных сил с изменением соответствующей потенциальной энергии взаимодействия тел.

14. Используя рис. 1.21 настоящего пособия, назовите силы, от которых зависит изменение импульса тела 1 за время Δt, и силы, от которых зависит изменение суммарного импульса всей системы взаимодействующих тел за то же время.

Запишите соответствующие законы: $\Delta\vec{p}_1 = \cdots; \Delta(\sum \vec{p_i}) = \cdots$

15. *Раскройте математический и физический смысл следующих соотношений:* $\vec{F} = d\vec{P}/dt$; $\vec{M} = d\vec{L}/dt$; $F_x = -dW_p/dx$.

16. При описании движения системы взаимодействующих тел можно использовать так называемые законы сохранения.

Назовите законы сохранения в механике и для каждого из них укажите особые свойства системы, при которых они выполняются.

Какие из названных законов носят векторный характер, а какие – скалярный?

Запишите эти законы в аналитической форме удобной для решения задач.

Рекомендуемая литература

1. Бутиков Е. И., Кондратьев А. С. Физика для углубленного изучения. Т. 1: Механика. Москва: Физматлит, 2004. 352 с.

2. Верхотуров А. Р., Шамонин В. А., Белкин С. Ю. Физика: учебное пособие по курсу общей физики для направлений подготовки бакалавров. Чита: ЧитГУ, 2011. 175 с.

3. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 1: Механика, Молекулярная физика: учеб. пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2008. 432 с.

4. Савченко Н. Д. Физческие основы классической механики: учеб. пособие. Чита: ЧитГУ, 2004. 124 с.

5. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие. Москва: Высшая школа, 2007. 560 с.

Глава 2. Основы релятивистской механики

Предметом изучения релятивистской механики (специальной теории относительности) является изучение особенностей движения тел или частиц вещества при скоростях движения близких к скорости света. В специальной теории относительности, как и в классической механике, рассматриваются только инерциальные системы отсчета.

2.1. Общие понятия

Постулаты Эйнштейна:

– все законы физики (а не только законы механики как это утверждалось в механическом принципе относительности) имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчёта;

– скорость света постоянна во всех системах отсчёта и не зависит от движения источника или наблюдателя.

Второй постулат является необходимым условием первого, но не согласуется с классическим законом сложения скоростей (1.35), а значит с преобразованиями Галилея и следствиями из этих преобразований (инвариантностью, то есть независимостью от системы отсчёта пространственных и временных интервалов Δx и Δt). Таким образом, принятие постулатов Эйнштейна неизбежно приводит к отказу от классических представлений об абсолютности и независимости друг от друга пространственных и временных соотношений при описании физических явлений. В частности, возникают эффекты сокращения длин и замедления времени при переходе от одной системы отсчёта к другой.

Переход от одной инерциальной системы к другой в специальной теории относительности задаётся *преобразованиями Лоренца*:

$$K \to K', \quad K' \to K.$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{\upsilon}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{\upsilon}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\beta = \frac{\upsilon}{c}.$$

В релятивистской механике вместо двух независимых инвариантов (Δr – расстояние между двумя точками и Δt – интервал времени между событиями, произошедшими в этих точках) существует только один четырёхмерный инвариант (т. е. величина одинаковая во всех инерциальных системах отсчёта) – *пространственно-временной интервал между событиями*:

$$\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \text{ или } \Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta r^2. \tag{2.2}$$

2.2. Кинематические соотношения релятивистской механики

Пусть некоторая система К′ движется равномерно и прямолинейно со скоростью υ_0 относительно неподвижной системы К. Для простоты примем, что координатные оси в этих системах ориентированы параллельно, система К′ движется вдоль оси *x*.

Наблюдатель, находящийся в системе К′, измеряет:

– размер некоторого тела в направлении движения системы К′ – L_0 *(продольный размер)*;

– размер тела в направлении перпендикулярном направлению движения системы – h_0 *(поперечный размер)*. При этом тело неподвижно относительно наблюдателя К′;

– промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке системы К′ – Δt_0;

– скорость движения некоторого тела, движущегося относительно него – υ'.

Наблюдатель, находящийся в системе К, измеряет те же величины со своей точки зрения и получает значения – L; h; Δt и υ, соответственно.

В этой ситуации имеют место следующие соотношения.

1. ***Релятивистское сокращение длин*:**

$$L = L_0\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_0}{c}\right)^2}, \tag{2.3}$$

где L_0 – собственная длина тела – продольный размер тела в системе координат К′, относительно которой тело покоится; L – длина тела в системе К, относительно которой тело движется со скоростью υ_0; c – скорость света в вакууме.

Поскольку $\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_0}{c}\right)^2} < 1$, $L < L_0$ *– собственная длина максимальна.*

2. ***Поперечные размеры тела не изменяются***, то есть оцениваются одинаково во всех системах отсчёта: $h = h_0$.

3. ***Релятивистское замедление хода часов:***

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_0}{c}\right)^2}}, \tag{2.4}$$

где Δt_0 – собственное время – промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной точке системы К′, измеренный по часам этой системы; Δt – промежуток времени между теми же событиями, измеренный по часам системы К.

Поскольку $\sqrt{1-\left(\frac{\upsilon_0}{c}\right)^2} < 1$, $\Delta t > \Delta t_0$ *– собственное время минимально*.

4. ***Релятивистский закон сложения скоростей***:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \dfrac{\upsilon_x' + \upsilon_0}{1 + \dfrac{\upsilon_x' \upsilon_0}{c^2}}, \\ \upsilon_y = \dfrac{\upsilon_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{\upsilon_x' \upsilon_0}{c^2}}; \\ \upsilon_z = \dfrac{\upsilon_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{\upsilon_x' \upsilon_0}{c^2}}. \end{cases} \qquad (2.5)$$

где υ' – относительная скорость (скорость тела относительно системы К′); υ_0 – переносная скорость (скорость системы К′ относительно системы К); υ – абсолютная скорость (скорость тела относительно системы К, условно принятой за неподвижную).

2.3. Динамические соотношения релятивистской механики

Согласно первому постулату Эйнштейна основной закон динамики (II закон Ньютона) должен записываться одинаково во всех инерциальных системах отсчёта: $F = ma = \dfrac{md\upsilon}{dt}$. Однако, дифференцируя по времени релятивистский закон сложения скоростей (2.5), легко заметить, что ускорения тел в разных системах отсчёта не совпадают. Это значит, что при движении тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, появляется зависимость ускорения не только от действующей силы, но и от той скорости, с которой двигалось тело к моменту действия силы. Чтобы учесть эту зависимость, сохраняя инвариантность формулировки основного закона динамики, Эйнштейн ввёл понятие релятивистской массы, которая не остаётся постоянной величиной, как это предполагалось в классической механике, а увеличивается при увеличении скорости движения тела.

1. ***Релятивистская масса***:

$$m = m_0\sqrt{1-\beta^2}, \tag{2.6}$$

где m_0 – масса покоя; $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$ – скорость частицы, выраженная в долях скорости света.

2. ***Релятивистский импульс***:

$$p = m\upsilon = \frac{m_0\upsilon}{1-\beta^2}, \tag{2.7}$$

где m – релятивистская масса; m_0 – масса покоя.

3. ***Закон пропорциональности массы и энергии***:

$$E = mc^2 \text{ или } E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2.8}$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя.

4. ***Полная энергия свободной частицы*** складывается из энергии покоя и кинетической энергии (T):

$$E = m_0c^2 + T = mc^2. \tag{2.9}$$

5. ***Кинетическая энергия релятивистской частицы*** (из (2.9) с учетом (2.6)):

$$T = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right). \tag{2.10}$$

6. ***Связь полной энергии с импульсом релятивистской частицы***:

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2. \tag{2.11}$$

7. ***Связь кинетической энергии с импульсом релятивистской частицы:***

$$p^2c^2 = T\left(T + 2m_0c^2\right). \tag{2.12}$$

Все законы релятивистской механики переходят в законы классической механики при скоростях движения тел много меньших скорости света в вакууме. Движение частицы можно рассматривать в рамках классической механики, если её кинетическая энергия много меньше энергии покоя $E < 0{,}02E_0$.

Энергия покоя для электрона: $E_0 \approx 0{,}5$ МэВ $= 0{,}8 \cdot 10^{-13}$ Дж;

Энергия покоя для протона: $E_0 \approx 938$ МэВ $= 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Дж;

Энергия покоя для альфа-частицы: $E_0 \approx 3750$ МэВ $= 6 \cdot 10^{-10}$ Дж.

2.4. Примеры решения задач

Пример 1. Определить кинетическую энергию электрона, если полная энергия движущегося электрона втрое больше его энергии покоя. Ответ выразите в электрон-вольтах.

Решение. В данной задаче рассматривается релятивистское движение электрона. Полную энергию электрона можно определить выражением:

$$E = T + E_0,$$

где T – кинетическая энергия электрона, а E_0 – его энергия покоя.

Энергия покоя электрона с массой покоя m_0 равна m_0c^2. По условию задачи полная энергия движущегося электрона втрое больше его энергии покоя, т. е. $E = 3E_0$. Следовательно, $T = 3E_0 - E_0 = 2E_0 = 2m_0c^2$.

Вычислим кинетическую энергию электрона:

$T = 2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 163{,}8 \cdot 10^{-15}$ Дж $= 102{,}37 \cdot 10^4$ эВ $= 1{,}02$ МэВ.

Ответ: $T = 1{,}02$ МэВ.

Контрольные вопросы

1. Что является предметом изучения релятивистской механики (специальной теории относительности)?

По условию задачи известно, что кинетическая энергия частицы равна $1{,}5 \cdot 10^{-14}$ Дж. *Можно ли решать задачу на основе законов классической механики, если*

а) частица – электрон?

б) частица – протон?

(Используйте критерий, указанный в разделе 2.3 настоящего пособия).

2. *Сформулируйте постулаты Эйнштейна, лежащие в основе специальной теории относительности.*

3. *Перечислите основные эффекты, возникающие при движении тел со скоростями, близкими к скорости света (с).*

4. Запишите закон сложения скоростей в классической и релятивистской механике.

Если скорость тела относительно подвижной системы отсчёта $\upsilon' = c$ *и скорость подвижной системы относительно неподвижной* $\upsilon_0 = c$ *(при этом* υ_0 *сонаправлена с* υ'*), то какова абсолютная скорость тела (относительно системы, условно принятой за неподвижную), согласно*

а) классическому закону?

б) релятивистскому закону?

Какому постулату Эйнштейна противоречит результат, полученный на основе классического закона сложения скоростей?

5. Что такое «собственная длина тела» и «собственное время»?

Космонавт, находящийся в космическом корабле, который движется относительно наблюдателя на Земле со скоростью, соизмеримой со скоростью света, измерил длину стержня, расположенного вдоль направления движения корабля, и получил значение – 1 м.

Изменится ли результат его измерения, если стержень расположить перпендикулярно направлению движения корабля?

Результат измерения длины этого стержня в первом положении наблюдателем, находящимся на Земле, будет больше, меньше или равен 1 м*?*

Результат измерения длины этого стержня во втором положении наблюдателем, находящимся на Земле, будет больше, меньше или равен 1 м*?*

6. В теории относительности так же, как в классической механике, выполняется закон сохранения импульса, но при этом под импульсом ($P = m\upsilon$) следует понимать релятивистский импульс.

Чем релятивистский импульс отличается от импульса в классической механике?

Сравните числовые значения импульса быстро движущейся частицы, вычисленные по определениям классической механики и теории относительности.

7. Запишите формулы для вычисления импульса частицы, если известны кинетическая энергия и масса покоя частицы:

а) в классической механике,

б) в теории относительности.

8. Сформулируйте закон Эйнштейна, выражающий взаимосвязь массы и энергии. О какой массе идет речь в записанном вами выражении: о массе покоя или о релятивистской массе?

Рекомендуемая литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики: учеб. пособие. Т. 1: Механика, Молекулярная физика. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. 432 с.

2. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие. Москва: Высшая школа, 2007. 560 с.

3. Фриш С. Э., Тиморева А. В. Курс общей физики. Т. 1: Физические основы механики, Молекулярная физика, Колебания и волны: учебник. Санкт-Петербург: Лань, 2009. 480 с.

Глава 3. Основы электродинамики

Предметом изучения электродинамики является электромагнитное взаимодействие тел, обусловленное наличием в составе атомов вещества элементарных частиц, обладающих особым свойством, называемым «электрический заряд». Электромагнитное взаимодействие проявляется в виде сил притяжения или отталкивания. В результате действия этих сил может изменяться пространственное распределение заряженных частиц, возникать деформация и механическое движение тел. Среди известных типов физических взаимодействий электромагнитное отличается наибольшим разнообразием своих проявлений: оно ответственно за возникновение сил упругости и трения, оно приводит к ряду специфических, тепловых, химических, оптических и механических эффектов. Электромагнитными взаимодействиями обусловлена структура материи в областях пространственных масштабов от 10^{-14} до 10^5м (на меньших расстояниях более важны ядерные взаимодействия, а на больших – гравитационные). Электромагнитные процессы играют главную роль в развитии современной техники (энергетики, транспорта, связи).

3.1. Общие понятия

Термин «электрический заряд» используется в трёх смыслах: как свойство частиц и тел, как физическая величина и как обозначение идеализированной модели заряженных тел.

Электрический заряд – это свойство элементарных частиц вещества, благодаря которому они способны к особого рода взаимодействию, проявляющемуся в действии сил притяжения или отталкивания.

Электрический заряд частицы нельзя увеличить, уменьшить, снять или сообщить – это неотъемлемое свойство частицы, подобное массе. Электрический заряд – это биполярное свойство. Бывают положительные и отрицательные заряды. Присвоение зарядам знаков «+» и

«–» выражает тот факт, что при соединении объектов, обладающих зарядами противоположной полярности, происходит компенсация зарядов так, что получившаяся система не будет проявлять электрических свойств. Одноименные (однополярные) заряды отталкиваются, разноименные (разнополярные) – притягиваются.

Электрический заряд q – скалярная физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия заряженных тел или частиц. При статических проявлениях определяется по силовому взаимодействию на основе закона Кулона, при динамических проявлениях – через силу тока (в системе СИ за единицу заряда принят 1 кулон (Кл) – электрический заряд, переносимый через поперечное сечение S за 1 секунду при постоянной силе тока, равной 1 амперу(А)).

Дискретность электрического заряда проявляется в том, что существует минимальный элементарный (неделимый) заряд. Элементарным положительным зарядом обладают протоны ($q_p = +e = +1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл), элементарным отрицательным зарядом обладают электроны ($q_e = -e = -1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл). Атомы вещества в целом нейтральны, так как суммарный заряд всех протонов в ядре атома компенсируется суммарным зарядом электронов. При определенных условиях (при трении тел, при их облучении и др.) баланс положительно и отрицательно заряженных частиц может нарушаться и тогда макротело становится заряженным. Таким образом, заряд любого тела является целым кратным от элементарного заряда e: $q_{\text{тела}} = (\pm) n \cdot e$, где $n = 1,2,3\ldots$ (n – разность числа протонов и электронов) В силу того, что элементарный заряд мал, для макротел при $q >> e$ можно пренебречь дискретной структурой заряда и считать его меняющимся непрерывно.

Идеализированные модели заряженных тел:

1) *точечный заряд* – заряженное тело формой и размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями, рассматриваемыми в задаче;

2) *бесконечно длинная нить и бесконечная плоскость* – заряженные тела, размеры которых много больше расстояний, рассматриваемых в задаче.

Движущиеся заряженные частицы вещества могут вызывать ряд специфических эффектов (тепловых, магнитных, химических), которые не наблюдаются для статических зарядов. Поэтому движение заряженных частиц можно рассматривать как особое явление.

Микроток – это движение отдельно взятой заряженной частицы. Например, в модели атома Резерфорда движение электрона вокруг ядра можно рассматривать как микроток.

Макроток – упорядоченное движение совокупности заряженных частиц. Тепловое хаотическое движение элементарных частиц вещества не создает макротока, так как в силу равновероятности всех направлений движения соответствующие микротоки компенсируют друг друга.

Ток проводимости – упорядоченное движение свободных заряженных частиц в среде или в вакууме (ток в металлах, в растворах электролитов, пучок электронов в вакуумной электронно-лучевой трубке и т. п.), вызванное действием электрического поля.

Конвекционный ток – упорядоченное движение заряженных частиц, вызванное причинами, не связанными с электрическим полем.

Многие специфические эффекты, вызванные движением заряженных частиц, зависят не от величины перенесённого заряда, а от скорости его переноса.

Сила тока (I) – скалярная физическая величина, характеризующая скорость переноса заряда через рассматриваемую поверхность, численно равна абсолютной величине заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника за единицу времени: $I = \frac{dq}{dt}$. При постоянном токе:

$$I = \frac{q}{t}. \tag{3.1}$$

Сила тока измеряется в амперах. Ампер относится к основным единицам СИ.

Электромагнитное поле – особая материальная среда, передающая взаимодействие между заряженными телами или частицами. Согласно модели Максвелла, электромагнитное поле распространяется в пространстве со скоростью 300000 км/с в виде электромагнитной волны.

Частными проявлениями электромагнитного поля являются электрическое и магнитное поля, обнаружение которых определяется условиями возникновения и выбранной для наблюдения системой отсчёта.

Электрическое поле – одна из составляющих электромагнитного поля. Электрическое поле может быть создано двумя способами:

– неподвижными зарядами (электростатическое поле);

– переменным магнитным полем (вихревое электрическое поле).

Электростатическое поле – это особый вид материи, передающий взаимодействие между неподвижными заряженными частицами или телами.

Электростатическое поле создаётся неподвижными электрическими зарядами и обнаруживается по действию сил на помещённые в него заряженные тела. Таким образом, заряды по отношению к полю могут выполнять две функции: источника поля и индикатора поля.

Магнитное поле – одна из составляющих электромагнитного поля. Это особый вид материи, передающий взаимодействие между движущимися зарядами или токами. Магнитное поле может быть создано двумя способами:

– движущимися зарядами (токами);

– переменным электрическим полем.

Магнитное поле обнаруживается по действию сил на движущиеся частицы, токи или на магнитную стрелку. Таким образом, токи по отношению к магнитному полю могут выполнять две функции: источника поля и индикатора поля.

3.2. Электростатическое поле

Основные задачи, возникающие при изучении электростатического поля:

– введение количественных характеристик поля и анализ его свойств;

– расчёт полей при известных зарядах, создающих поле;

– расчёт действий поля на помещенные в него заряды и особенности движения заряженных частиц в электрических полях.

3.2.1. Понятийный аппарат (характеристики электрического поля)

Основными характеристиками электрического поля являются напряжённость и потенциал.

Напряженность электрического поля – векторная физическая величина, характеризующая силовое действие поля на помещённые в него заряды (силовая характеристика поля в рассматриваемой точке), численно равная силе, действующей на единичный неподвижный пробный заряд (индикатор), помещённый в исследуемую точку поля: $\vec{E}=\dfrac{\vec{F}}{Q}$,

а по модулю:

$$E=\frac{F}{Q}. \qquad (3.2)$$

Вектор напряжённости совпадает по направлению с силой, действующей на положительный пробный заряд, помещённый в исследуемую точку поля.

Потенциал – скалярная энергетическая характеристика электростатического поля, численно равная отношению потенциальной энергии к величине заряда, помещённого в исследуемую точку поля:

$$\varphi=\frac{W_p}{Q}. \qquad (3.3)$$

На основе понятий напряжённость и потенциал, вводятся дополнительные характеристики, используемые для математического описания свойств электростатического поля.

Циркуляция вектора напряжённости по контуру L – скалярная физическая величина, на основе которой производится классификация полей на потенциальные и непотенциальные, численно определяемая интегралом вида:

$$\text{Ц}_E = \int \left(\vec{E}, \overrightarrow{dl} \right) = \int E_l dl, \tag{3.4}$$

где $\left(\vec{E}, d\vec{l} \right)$ – скалярное произведение вектора напряжённости и вектора элемента длины контура; E_l – проекция вектора напряжённости на касательную к контуру.

Поле называется потенциальным, если циркуляция вектора по *замкнутому* контуру равна нулю. Электростатическое поле потенциально (см. далее).

Поток вектора напряжённости через поверхность S – скалярная физическая величина, на основе которой производится классификация полей на вихревые и безвихревые, численно определяемая интегралом вида:

$$\Phi_E = \int \left(\vec{E}, \overrightarrow{dS} \right) = \int E_n dS, \tag{3.5}$$

где $\left(\vec{E}, d\vec{S} \right)$ – скалярное произведение напряжённости на элемент площади поверхности (при этом за направление вектора $\overrightarrow{dS}$ принимают направление нормали $\vec{n}$ к поверхности); E_n – проекция вектора напряжённости на нормаль к поверхности.

Понятие «поток вектора напряжённости» связано с графическим изображением полей и *определяет количество силовых линий поля, пересекающих заданную поверхность*. Поле называется безвихревым, если его силовые линии не замкнутые и поток вектора через *замкнутую* поверхность не равен нулю. Электростатическое поле безвихревое (см. далее).

Градиент потенциала – векторная физическая величина, характеризующая скорость изменения потенциала при переходе от одной точки поля к другой.

$$\overrightarrow{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{dn} \cdot \vec{n}, \tag{3.6}$$

где $\vec{n}$ – единичная нормаль к эквипотенциальной поверхности;

$\frac{d\varphi}{dn}$ – производная потенциала в направлении нормали.

В декартовых координатах:

$$\overrightarrow{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \vec{i} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \vec{j} + \frac{d\varphi}{dz} \cdot \vec{k}. \tag{3.7}$$

Вектор градиента потенциала направлен в сторону наиболее быстрого возрастания потенциала по нормали к эквипотенциальной поверхности. Если в поле выбрать произвольное направление *l*, то проекция градиента потенциала на это направление $\left(\overrightarrow{grad}\varphi\right)_l = \frac{d\varphi}{dl}$. Она показывает, как быстро меняется потенциал в заданном направлении (то есть, изменение потенциала, приходящееся на отрезок единичной длины в заданном направлении).

Связь между характеристиками поля

В общем случае:

– напряжённость равна градиенту потенциала с обратным знаком (то есть, направлена противоположно вектору градиента):

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi; \tag{3.8}$$

– разность потенциалов между двумя точками поля равна циркуляции напряжённости по произвольному контуру, соединяющему данные точки, со знаком «минус»:

$$\Delta\varphi = -\int E_l dl. \tag{3.9}$$

Если потенциал поля изменяется в одном направлении:

– проекция напряжённости на произвольное направление x численно равна скорости изменения потенциала в заданном направлении. Знак «минус» показывает, что напряжённость направлена в сторону убывания потенциала (с математической точки зрения проекция напряжённости на направление произвольной оси X вычисляется как первая производная от потенциала по координате x):

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}; \tag{3.10}$$

Если поле однородное разность потенциалов определяется:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -E \cdot l_{12} \cdot \cos\alpha, \tag{3.11}$$

где l_{12} – длина вектора, соединяющего две точки, между которыми ищется разность потенциалов; α – угол между этим вектором и направлением напряжённости поля.

Энергия электрического поля. Материальность электрического поля выражается в том, что поле обладает энергией, за счёт которой происходят изменения в характере движения заряженных тел и частиц, помещённых в поле. Энергия поля пропорциональна квадрату его напряжённости:

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot E^2}{2} \cdot V, \tag{3.12}$$

где W – энергия поля, сосредоточенная в объёме V; $\left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot E^2}{2}\right)$– плотность энергии (энергия, сосредоточенная в единице объёма); E – напряжённость поля; ε – диэлектрическая проницаемость среды, в которой существует поле.

Графическое изображение электростатического поля

Существует два способа графического изображения полей:

– с помощью линий напряжённости;

– с помощью эквипотенциальных поверхностей.

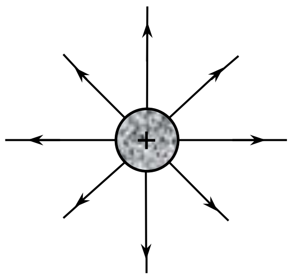

Рис. 3.1

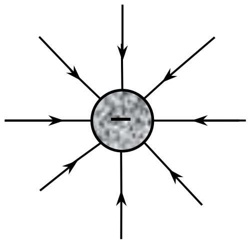

Рис. 3.2

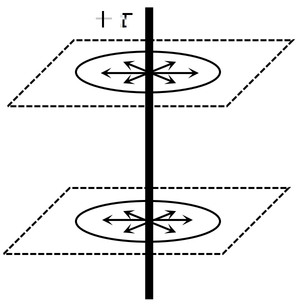

Рис. 3.3

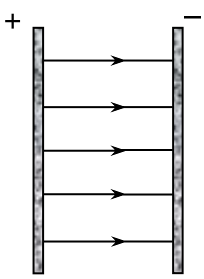

Рис. 3.4

Линии напряжённости (силовые линии) проводятся так, чтобы касательная в каждой точке совпадала с вектором напряжённости поля, а густота линий соответствовала числовому значению напряжённости (там, где густота линий больше, напряжённость поля больше).

Силовые линии электростатического поля *незамкнутые,* что отражает безвихревой характер поля. Силовые линии *направлены от* «+» *к* «–», то есть начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, либо одним концом уходят в бесконечность. Для однородного поля, напряжённость которого во всех точках одинакова как по числовому значению, так и по направлению, силовые линии представляют собой систему параллельных прямых с одинаковой густотой (см. рис. 3.1, 3.2, 3.3, 3.4).

Эквипотенциальная поверхность – это поверхность, во всех точках которой потенциал поля одинаков. Эквипотенциальные поверхности всегда перпендикулярны линиям напряжённости поля. На рис. 3.5, 3.6, 3.7 эквипотенциальные поверхности изображены пунктирными линиями.

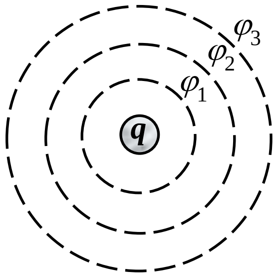

Рис. 3.5

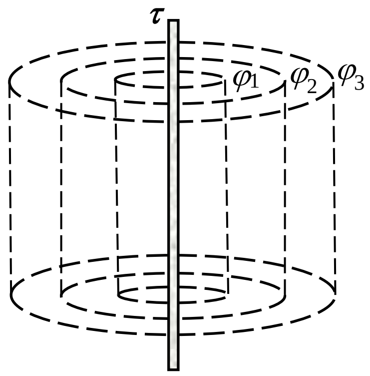

Рис. 3.6

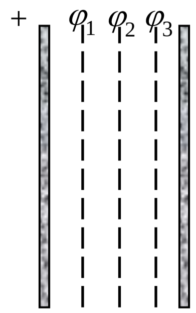

Рис. 3.7

3.2.2. Основные законы и соотношения электростатики

Закон сохранения электрического заряда: *полный заряд системы не изменяется, если через её границу не проходят электрически заряженные частицы.*

Закон сохранения заряда является фундаментальным законом физики, он справедлив для всех систем микро- и макромира. Если нет частиц высоких энергий, то сохраняется не только полный заряд, но и в отдельности положительный и отрицательный заряды системы. Если в системе есть частицы высоких энергий или в систему попадают фотоны высоких энергий, то могут происходить процессы рождения электрон-позитронных пар или их аннигиляции, в результате чего меняются количества отрицательно и положительно заряженных частиц. Однако полный заряд системы все равно сохраняется.

Теорема о циркуляции вектора E для электростатического поля: циркуляция вектора напряжённости электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L E_l dl = 0. \tag{3.13}$$

Эта теорема, как говорилось ранее, является математическим выражением свойства потенциальности электростатического поля.

Теорема Остроградского – Гаусса (теорема о потоке вектора E) для электростатического поля: поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, попадающих внутрь этой поверхности, деленной на ε_0:

$$\oint_S E_n dS = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}. \qquad (3.14)$$

Эта теорема является математическим выражением незамкнутости силовых линий поля. Кроме того она может использоваться как метод для расчёта напряжённости поля при известной конфигурации силовых линий (см. пример решения задач 4 и 5 в разделе 3.6).

Расчёт характеристик поля при известных зарядах, создающих поле. Напряжённость и потенциал поля в некоторой точке зависят от:

– величины зарядов, создающих поле;

– их конфигурации (формы заряженных тел);

– положения точки в поле;

– электрических свойств среды, в которой существует поле.

В нижеприведённых формулах для расчёта модуля напряжённости заряд $|Q|$ берётся по абсолютной величине, без учёта знака заряда, а в формулах для расчёта потенциала знак заряда, создающего поле, учитывается – $(\pm)Q$. Потенциал (так же как и потенциальная энергия в механике) определяется с точностью до аддитивной постоянной *C,* зависящей от выбора точки нулевого потенциала, но в задачах мы всегда имеем дело с разностью потенциалов, которая не зависит от этого выбора. ε – диэлектрическая проницаемость среды, в которой существует электрическое поле (табличная величина) Числовые значения коэффициентов в системе СИ: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9$ Нм^2/Кл^2; $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

▪ Модуль напряжённости и потенциал поля, создаваемого точечным зарядом:

$$E=\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2};\quad \varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}+C, \tag{3.15}$$

где r – расстояние от заряда Q до точки, в которой определяются напряженность и потенциал.

▪ Модуль напряжённости и потенциал поля, создаваемого проводящей заряженной сферой радиусом R на расстоянии r от центра сферы:

$$E=0;\ \varphi=0\ (\text{при } r<R); \tag{3.16}$$

$$E=\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R^2};\ \varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}+C\ \ (\text{при } r=R); \tag{3.17}$$

$$E=\frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2};\ \varphi=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}+C\ \ (\text{при } r>R). \tag{3.18}$$

▪ Модуль напряжённости и потенциал поля, создаваемого бесконечной прямой равномерно заряженной нитью или бесконечно длинным цилиндром с линейной плотностью заряда τ:

$$E=\frac{|\tau|}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r};\quad \varphi=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\ln r+C, \tag{3.19}$$

где $\tau=\dfrac{Q}{l}$ – линейная плотность заряда (заряд, сосредоточенный на единице длины); r – расстояние от нити или оси цилиндра до точки, в которой определяются характеристики поля.

▪ Модуль напряжённости и потенциал поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ:

$$E=\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0\varepsilon};\quad \varphi=\frac{\sigma\cdot r}{2\varepsilon_0\varepsilon}+C, \tag{3.20}$$

где $\sigma=\dfrac{Q}{S}$ – поверхностная плотность заряда (заряд, сосредоточенный на единице площади); r – расстояние от плоскости до точки, в которой определяется потенциал поля.

Принцип суперпозиции электрических полей: если в одной и той же точке пространства созданы два или несколько полей, то эти поля не взаимодействуют и не искажают друг друга, а их характеристики складываются, причём напряжённости складываются векторно, а потенциалы – алгебраически:

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots = \sum \vec{E}_i; \tag{3.21}$$

$$\varphi_{\text{рез}} = (\pm)\varphi_1 + (\pm)\varphi_2 + (\pm)\varphi_3 + \ldots = \sum (\pm)\varphi_i. \tag{3.22}$$

В случае зарядов, непрерывно распределённых по длине тела, по его поверхности или объёму, напряжённость и потенциал поля, создаваемого этими зарядами, так же можно найти на основании принципа суперпозиции, поскольку любое заряженное тело можно рассматривать как систему бесконечно большого числа точечных зарядов. В этом случае принцип суперпозиции принимает вид:

$$\vec{E}_{\text{рез}} = \int d\vec{E}; \tag{3.23}$$

$$\varphi_{\text{рез}} = \int d\varphi. \tag{3.24}$$

Например, когда заряд равномерно распределён вдоль нити с линейной плотностью τ, то на нити выделяется малый участок длиной dl с зарядом $dQ = \tau dl$. Такой заряд можно рассматривать как точечный и применять соответствующие формулы:

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}; \;\; d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \tag{3.25}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от выделенного элемента dl к точке, в которой вычисляется напряжённость.

Интегрирование по формулам (3.23) и (3.24) с учётом (3.25) ведётся по всей длине l заряженной нити (см. примеры 2 и 3 в гл. 3.6).

Действие электростатического поля на помещенные в него заряды. Электростатическое поле – силовое поле, оно проявляет себя в действии сил на помещенные в него заряды, вследствие чего изменяется состояние их движения. Результат действия поля на заряженные частицы или тела может выражаться:

– в изменении модуля скорости (ускорении или замедлении движения);

– в изменении направления скорости движения (искривлении траектории);

– в изменении ориентации в пространстве (для систем, обладающих дипольным моментом).

Количественно действие электростатического поля на помещенные в него заряды может быть оценено несколькими способами.

▪ Сила, с которой поле действует на заряженную частицу или тело:

$$\vec{F}_{\text{эл}} = q\vec{E}. \tag{3.26}$$

Направление этой силы совпадает с направлением вектора напряжённости поля, если заряд, помещённый в поле, положительный и противоположно напряжённости, если заряд отрицательный.

В частном случае, когда есть два *точечных* заряда Q_1 и Q_2, один из которых создаёт поле, а другой испытывает действие этого поля, сила определяется *законом Кулона*:

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}. \tag{3.27}$$

На основании III закона Ньютона можно утверждать, что сила, с которой поле, созданное зарядом Q_1, действует на заряд Q_2 равна силе, с которой поле, созданное зарядом Q_2, действует на заряд Q_1.

▪ Потенциальная энергия, которую приобретает заряд q, помещённый в некоторую точку поля с потенциалом φ:

$$W_{\text{р}} = q\varphi. \tag{3.28}$$

▪ Работа, совершаемая при перемещении заряда q из одной точки в другую:

1) через напряжённость поля:

$$A_{\text{эл.}} = q\int E_l \, dl, \tag{3.29}$$

где E_l – проекция напряжённости на касательную к траектории движения заряда.

В частном случае когда поле однородное (то есть когда во всех точках поля напряжённость одинакова как по абсолютной величине так и по направлению) и перемещение заряда происходит по прямолинейной траектории:

$$A_{\text{эл.}} = qE\cos\alpha, \tag{3.30}$$

где α – угол междунаправлением напряженности поля и направлением перемещения заряда;

2) через разность потенциалов:

$$\mathrm{A}_{\text{эл.}} = -\mathrm{q}\Delta\varphi = -\,\mathrm{q}(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{3.31}$$

Уравнение (3.31) отражает некоторые особенности работы, совершаемой электростатическим полем при перемещении зарядов, а именно:

– работа в электростатическом поле не зависит от формы траектории движения заряда, а определяется только положением начальной и конечной точек перемещения (потенциалами φ_2 и φ_1);

– работа при перемещении заряда по замкнутому контуру (при $\varphi_2 = \varphi_1$) равна нулю;

– работа при перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю. (Эквипотенциальной называется поверхность перпендикулярная силовым линиям поля, во всех точках которой потенциал одинаков). Эти особенности работы отражают *потенциальный характер* электростатического поля.

▪ Момент силы, вызывающий поворот диполя в поле с напряжённостью *E:*

$$M = P_{\text{e}} \cdot E \cdot \sin\alpha, \tag{3.32}$$

где $P_{\text{e}} = |q| \cdot l$ – электрический момент диполя (или дипольный момент);

l – расстояние между зарядами, образующими диполь;

α – угол между l и E.

3.3. Магнитное поле

Основные задачи, возникающие при изучении магнитного поля:

– введение количественных характеристик поля и анализ его свойств;

– расчёт полей при известных токах, создающих поле;

– расчёт действий поля на помещённые в него токи и заряды, особенности движения заряженных частиц в магнитных полях.

3.3.1. Понятийный аппарат (характеристики магнитного поля)

Индукция магнитного поля – векторная физическая величина, характеризующая силовое действие поля на помещённые в него токи (движущиеся заряды), численно равная отношению максимального вращающего момента сил, действующего на контур с током, помещённый в исследуемую точку поля, к магнитному моменту этого контура:

$$B = \frac{M^{\max}}{IS}, \tag{3.33}$$

где $IS = P_m$ – магнитный момент контура, обтекаемого током I; S – площадь, ограниченная этим контуром.

Циркуляция вектора индукции по контуру L – скалярная физическая величина, на основе которой производится классификация полей на потенциальные и непотенциальные, численно определяемая интегралом вида:

$$\vec{Ц}_B = \int\left(\vec{B}, d\vec{l}\right) = \int \vec{B}_l d\vec{l}, \tag{3.34}$$

где $\left(\vec{B}, d\vec{l}\right)$ – скалярное произведение вектора индукции и вектора элемента длины контура; B_l – проекция вектора индукции на касательную к контуру.

Поле называется непотенциальным, если циркуляция вектора по *замкнутому* контуру не равна нулю. Магнитное поле не потенциально (см. далее по тексту).

Поток вектора индукции через поверхность S – скалярная физическая величина, на основе которой производится классификация полей на вихревые и безвихревые, численно определяемая интегралом вида:

$$\Phi_B = \int\left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int \vec{B}_n d\vec{S}, \tag{3.35}$$

где $\left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$ – скалярное произведение индукции на элемент площади поверхности (при этом за направление вектора $d\vec{S}$ принимают направление нормали (перпендикуляра) к поверхности $\vec{n}$);

B_n – проекция вектора напряжённости на нормаль к поверхности.

Понятие «поток вектора индукции» связано с графическим изображением полей и *определяет количество силовых линий поля, пересекающих заданную поверхность.* Поле называется вихревым, если его силовые линии замкнутые, а поток вектора через *замкнутую* поверхность равен нулю. Магнитное поле вихревое.

Энергия магнитного поля. Магнитное поле (как любой материальный объект) обладает энергией, за счет которой происходят изменения в характере движения заряженных частиц и проводников с током, помещённых в поле. Энергия магнитного поля пропорциональна квадрату его индукции:

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} \cdot \mathrm{V}, \tag{3.36}$$

где W – энергия поля, сосредоточенная в объёме V;

$\dfrac{B^2}{2\mu_0\mu}$ – объёмная плотность энергии поля (энергия в единице объёма); B – индукция магнитного поля;

μ – магнитная проницаемость среды, в которой существует поле.

Графическое изображение магнитного поля. *Линии индукции (силовые линии) магнитного поля* проводятся так, чтобы касательная в каждой точке совпадала с вектором индукции поля, а густота линий соответствовала числовому значению индукции (там, где густота линий больше, индукция поля больше).

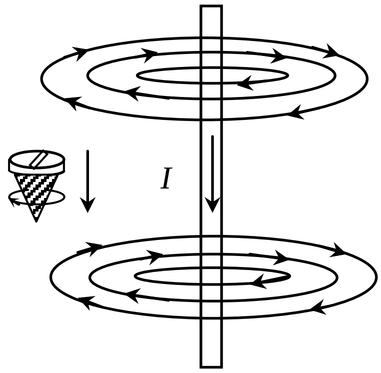

Рис. 3.8

В отличие от электростатического поля линии индукции магнитного поля *замкнутые*, что отражает вихревой характер магнитного поля.

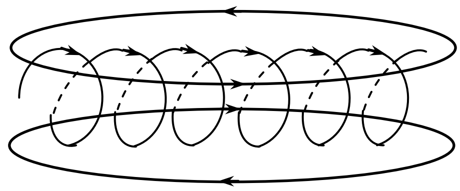

Рис. 3.9

В случае прямого проводника с током линии индукции магнитного поля представляют собой концентрические окружности с центром на проводнике, лежащие в плоскости перпендикулярной проводнику. Внутри длинного соленоида поле однородное – силовые линии параллельны оси соленоида. На оси кругового тока силовая линия вырождается в бесконечную прямую перпендикулярную плоскости витка (см. рис 3.8, 3.9, 3.10).

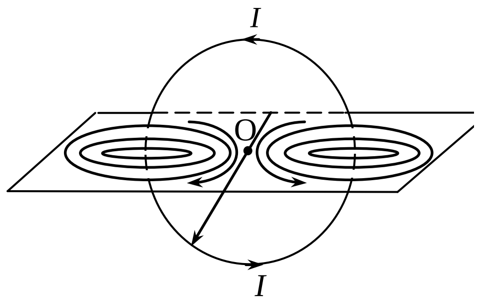

Рис. 3.10

Если магнитное поле создано электрическим током, то для определения *направления вектора индукции* этого поля в произвольной точке необходимо выполнить следующие действия:

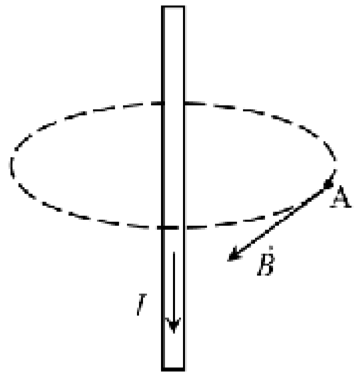

Рис. 3.11

– изобразить на рисунке одну из силовых линий поля, проходящую через исследуемую точку поля;

– определить направление силовой линии по правилу правого винта (буравчика);

– провести касательную к силовой линии в рассматриваемой точке, которая и определит направление вектора индукции (см. рис. 3.11).

3.3.2. Основные законы и соотношения электромагнетизма

Теорема о циркуляции вектора B для магнитного поля: циркуляция вектора индукции магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром, умноженной на μ_0:

$$\oint_L B_l \, dl = \mu_0 \sum I_i. \qquad (3.37)$$

Эта теорема, как говорилось ранее, является математическим выражением свойства непотенциальности магнитного поля. Кроме того, она может использоваться как метод для расчёта индукции поля при известной конфигурации силовых линий (см. пример решения задачи 2 в гл. 3.6).

Теорема Остроградского – Гаусса (теорема о потоке вектора B) для магнитного поля: поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S B_n dS = 0. \qquad (3.38)$$

Эта теорема является математическим выражением вихревого характера магнитного поля, то есть свойства замкнутости его силовых линий.

Закон Био-Савара-Лапласа позволяет вычислять индукцию магнитного поля, созданного бесконечно малым элементом тока Idl на расстоянии r от этого элемента:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^3}[d\vec{l}, \vec{r}], \text{ или по модулю } dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin\alpha, \qquad (3.39)$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемого элементом провода длиной $d\vec{l}$ с током I;

α – угол между направлением элемента провода $d\vec{l}$ и радиус-вектором $\vec{r}$;

μ – магнитная проницаемость среды, в которой существует поле.

Направление вектора $d\vec{B}$ определяется правилом векторного произведения: вектор $d\vec{B}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и $\vec{r}$, и направлен в ту сторону, откуда кратчайший поворот от $d\vec{l}$ к $\vec{r}$ кажется происходящим против часовой стрелки (см. рис. 3.12).

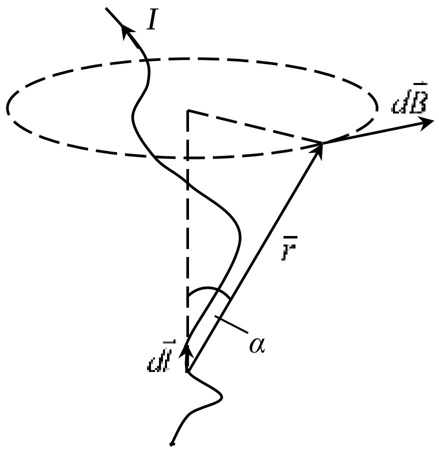

Рис. 3.12

Коэффициент $\frac{\mu_0}{4\pi}$ определяется только выбором системы единиц. В системе СИ: $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$, а $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Гн}}{\text{м}}$.

> ***Принцип суперпозиции магнитных полей:*** если в одной и той же точке пространства созданы два или несколько полей, то эти поля не взаимодействуют и не искажают друг друга, а индукция результирующего поля находится как векторная сумма индукций отдельных полей:

$$\vec{B}_{\text{рез}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \ldots = \sum \vec{B}_i. \tag{3.40}$$

Любой проводник с током можно представить состоящим из бесконечно большого числа бесконечно малых элементов (Idl), тогда для проводника конечной длины индукция магнитного поля может быть найдена как векторная сумма полей, создаваемых каждым элементом тока:

$$\vec{B}_{\text{рез}} = \int d\vec{B}_i, \tag{3.41}$$

где $d\vec{B}_i$ – индукция магнитного поля, созданного бесконечно малым элементом тока $I\,dl$, определяемая законом Био – Савара – Лапласа.

Расчёт характеристик поля при известных токах, создающих поле

Индукция магнитного поля в некоторой точке зависит от:

– силы тока, создающего поле;

– формы проводника, по которому течет ток;

– положения точки в поле;

– магнитных свойств той среды, в которой существует поле.

▪ Магнитная индукция в центре кругового тока:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}, \tag{3.42}$$

где R – радиус кругового витка.

▪ Магнитная индукция на оси кругового тока:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{(R^2 + h^2)^{3/2}}, \tag{3.43}$$

где h – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция.

▪ Магнитная индукция поля длинного прямого тока:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi \cdot r_0}, \tag{3.44}$$

где r_0 – расстояние от оси провода до точки, в которой определяется магнитная индукция.

▪ Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком провода с током

$$B=\frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2). \qquad (3.45)$$

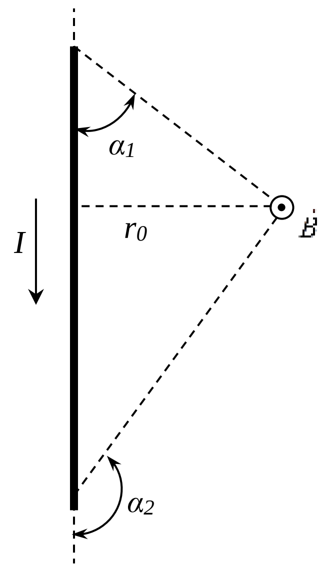

Рис. 3.13

Обозначения ясны из (см. рис. 3.13). Направление вектора магнитной индукции обозначено точкой – это значит, что $\vec{B}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа к нам.

При симметричном расположении концов провода относительно точки, в которой определяется магнитная индукция,

$$-\cos\alpha_2=\cos\alpha_1=\cos\alpha,$$

тогда $B=\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi\cdot r_0}\cos\alpha.$

▪ Магнитная индукция поля длинного соленоида при плотной намотке:

$$B=\mu\mu_0 n\cdot I, \qquad (3.46)$$

где n – число витков, приходящееся на единицу длины соленоида (то есть отношение числа витков соленоида к его длине или густота намотки).

▪ *Связь магнитного потока с силой тока.* По определению магнитный поток ($\Phi_В$) пропорционален индукции магнитного поля (B), которая в свою очередь пропорциональна силе тока, создающего поле (I), отсюда следует, что *между Φ_B и I* существует прямая пропорциональная зависимость:

$$\Phi_B=L\cdot I, \qquad (3.47)$$

где L – *индуктивность или коэффициент самоиндукции проводника*, который зависит от геометрических размеров и формы проводника, а также от магнитных свойств окружающей среды. В отсутствие ферромагнетиков L не зависит от силы тока в цепи. Если же среда ферромагнитная, то L зависит от тока, поскольку магнитные свойства среды меняются вместе с изменением магнитного поля, созданного током.

▪ Индуктивность длинного соленоида при плотной однослойной намотке:

$$L_{\text{сол.}} = \mu_0 \mu \cdot n^2 \mathrm{V} = \mu_0 \mu \cdot n^2 l S = \mu_0 \mu \cdot N^2 \frac{S}{l}, \quad (3.48)$$

где N – общее число витков соленоида; l – длина соленоида; S – площадь сечения соленоида; V – общий объём соленоида; n – число витков, приходящееся на единицу длины соленоида; μ – магнитная проницаемость сердечника.

▪ Индуктивность линейного проводника пренебрежимо мала: $L_{\text{прям.}} \to 0$.

Действие магнитного поля на помещенные в него заряды и токи. Особенностью магнитного поля является то, что оно действует только на движущиеся заряды. Сила, действующая со стороны магнитного поля, всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы и поэтому не вызывает изменения скорости по модулю, не изменяет кинетическую энергию частицы и не совершает работу. Результат действия магнитного поля может выражаться:

– в искривлении траектории движения частицы;

– в изменении ориентации в пространстве (для систем, обладающих магнитным моментом).

▪ Сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле (сила Лоренца)

$$\vec{F} = Q\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right], \text{ или по модулю: } F = Q\upsilon B \sin\alpha, \quad (3.49)$$

где Q – заряд частицы; $\vec{\upsilon}$ – скорость заряженной частицы; B – индукция магнитного поля; $\left[\vec{\upsilon}, \vec{B}\right]$ – векторное произведение векторов $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$; α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

Направление силы Лоренца определяется по правилу векторного произведения: сила перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$, и для положительно заряженной частицы направлена в ту сторону, откуда кратчайший поворот от $\vec{\upsilon}$ к $\vec{B}$ кажется происходящим против часовой стрелки. Этому правилу эквивалентно правило левой руки: если линии индукции входят в ладонь, пальцы направлены по скорости, то отогнутый большой палец указывает направление силы, действующей на положительно заряженную частицу. Для отрицательно заряженной частицы сила Лоренца имеет противоположное направление (см. рис. 3.14).

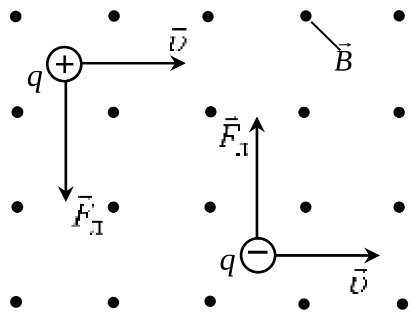

Рис. 3.14

▪ Сила, действующая на бесконечно малый элемент проводника с током длиной dl в магнитном поле (сила Ампера):

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right] \text{ или по модулю: } dF = IdlB \cdot \sin\alpha, \qquad (3.50)$$

где $[d\vec{l}, \vec{B}]$ – векторное произведение векторов $d\vec{l}$ и $\vec{B}$; I – сила тока в проводнике; $d\vec{l}$ – длина бесконечно малого элемента проводника; $\vec{B}$ – магнитная индукция поля; α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

В однородном магнитном поле ($\vec{B} = const$) сила Ампера, действующая на прямолинейный проводник длиной l:

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin\alpha. \qquad (3.51)$$

Направление силы Ампера определяется по правилу векторного произведения или по эквивалентному ему правилу левой руки.

▪ Момент сил (вращающий момент), действующий на плоский контур с током, помещенный в однородное магнитное поле:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \vec{B}\right] \text{ или по модулю: } M = p_m B \cdot \sin\alpha = ISB \cdot \sin\alpha, \qquad (3.52)$$

где $\vec{p}_m = \vec{n}IS$ – магнитный момент плоского контура с током ($\vec{n}$ – единичный вектор нормали (положительной) к плоскости контура; I – сила тока, протекающего по контуру; S – площадь контура); α – угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$, то есть между линиями индукции магнитного поля и нормалью к плоскости контура.

Из (3.52) следует, что момент сил, действующий на контур, максимален при $\alpha = 90^{\circ}$ ($\sin\alpha = 1$), то есть, когда плоскость контура параллельна силовым линиям поля. При $\alpha = 0^{\circ}$ (плоскость контура перпендикулярна силовым линиям поля) вращающий момент сил равен нулю ($\sin\alpha = 0$) – это положение равновесия, следовательно, свободный контур с током (на который не действуют внешние силы) при помещении в магнитное поле всегда устанавливается перпендикулярно линиям индукции поля.

▪ Работа при перемещении линейного проводника с током в магнитном поле:

$$A = I \cdot \Phi_B, \tag{3.53}$$

где I – сила тока; Φ_B – магнитный поток, пронизывающий площадь, «прочерченную» проводником при своем движении.

▪ Работа при перемещении замкнутого контура с током в магнитном поле (при поступательном или вращательном движении):

$$A = I \cdot \Delta\Phi_B, \tag{3.54}$$

где $\Delta\Phi_B$ – изменение магнитного потока через поверхность, опирающуюся на контур.

3.3.3. Явление электромагнитной индукции

При помещении замкнутого проводящего контура в магнитное поле в нём может возникнуть электрический ток при условии, что магнитный поток через поверхность, ограниченную проводником, изменяется с течением времени. Возникновение тока свидетельствует о возникновении электродвижущей силы, которую в данном случае называют ЭДС индукции.

Закон Фарадея для явления электромагнитной индукции: Э.Д.С. индукции, возникающая в замкнутом проводящем контуре, помещённом в магнитное поле, численно равна скорости изменения потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром, с обратным знаком:

$$\varepsilon_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{3.55}$$

(математически это означает, что ЭДС индукции вычисляется как первая производная от магнитного потока по времени).

Правило Ленца: индукционный ток, возникающий в проводнике вследствие действия ЭДС индукции, направлен так, чтобы своим магнитным полем противодействовать изменению магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.

Знак «−» в законе Фарадея является отражением этого правила.

Частные случаи явления электромагнитной индукции:

1. Возникновение разности потенциалов на концах провода, движущегося со скоростью υ в однородном магнитном поле с индукцией B:

$$U = B \cdot l \cdot \upsilon \cdot \sin\alpha, \tag{3.56}$$

где l – длина провода; α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

2. Самоиндукция – возникновение ЭДС индукции в проводнике, по которому течёт изменяющийся с течением времени электрический ток, являющийся источником магнитного поля.

Учитывая связь потока с силой тока в проводнике ($\Phi = LI$), закон (3.55) для случая самоиндукции можно представить в виде:

$$\varepsilon_s = -\left(\frac{L \cdot dI}{dt} + \frac{I \cdot dL}{dt}\right), \tag{3.57}$$

где L – коэффициент самоиндукции проводника (индуктивность), зависящий от геометрических размеров, формы проводника и магнитных свойств окружающей среды.

Из (3.57) видно, что ЭДС самоиндукции возникает в проводнике в двух случаях: при изменении силы тока в проводнике $\frac{dI}{dt} \neq 0$, либо при изменении индуктивности проводника $\frac{dL}{dt} \neq 0$. Если L = const, то ЭДС самоиндукции определяется только скоростью изменения тока в проводнике:

$$\varepsilon_s = -\frac{L \cdot dI}{dt}. \qquad (3.58)$$

3. Токи Фуко: если изменяющийся поток магнитной индукции создаётся в массивном сплошном проводнике (например, в сердечнике катушки, по которой течёт переменный ток), то в этом проводнике возникают вихревые токи, замыкающиеся внутри проводника. Так как сопротивление такого проводника мало, вихревые токи достигают больших значений, что приводит к нагреванию проводника. Этот эффект используется в индукционных печах для плавки металлов в вакууме с целью получения сверхчистых материалов и др.

3.4. Электрические и магнитные свойства вещества и тел

В состав атомов любого вещества входят электрически заряженные частицы (электроны и протоны), причём по модели Резерфорда электроны движутся вокруг ядра атома по замкнутым траекториям, образуя микротоки. В связи с этим при помещении вещества в электрическое либо в магнитное поле на заряженные частицы действуют определённые силы, вызывающие изменения в характере движения этих частиц, что приводит к изменению свойств вещества.

3.4.1. Электрические свойства вещества

По электрическим свойствам все вещества делятся на три класса: диэлектрики, проводники и полупроводники. В свою очередь, диэлектрики подразделяются на полярные, неполярные и сегнетоэлектрики.

Проводники принято делить на проводники первого рода (металлы) и второго рода (растворы электролитов, газы при особых условиях). Кроме того, существует особая группа – сверхпроводники. Полупроводники могут иметь проводимость *p*-типа, *n*-типа или смешанную. Подробно описание свойств веществ разных групп можно найти в учебниках. В данном разделе рассматриваются кратко только некоторые из них.

Диэлектрики в электростатическом поле. Диэлектрики состоят из электрически нейтральных молекул, поэтому поле не может вызвать их движение по объёму образца, а приводит только к деформации молекул и ориентации их дипольных моментов в направлении силовых линий поля.

Поляризация диэлектриков – деформация и ориентация молекул вещества в электрическом поле сопровождается возникновением «связанных» зарядов на поверхностях, ограничивающих образец, которые создают своё собственное поле, ориентированное противоположно внешнему, в результате чего происходит ослабление поля внутри вещества.

Вектор поляризации (поляризованность $\vec{P}$) – количественная мера степени поляризации вещества, численно равная векторной сумме дипольных моментов молекул в единице объёма вещества.

Диэлектрическая проницаемость вещества ε – количественная мера степени ослабления поля внутри вещества, которая показывает во сколько раз напряжённость поля в вакууме больше, чем в данном веществе:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E_{\text{вещ}}}. \tag{3.59}$$

Поскольку диэлектрики всегда ослабляют поле, диэлектрическая проницаемость вещества $\varepsilon > 1$; для воздуха принимается $\varepsilon = 1$.

Металлические проводники в электростатическом поле. Металлы состоят из положительных ионов, образующих кристаллическую решетку, и «свободных» электронов, способных перемещаться по объёму образца. В отсутствие электрического поля тепловое движение электронов хаотическое.

Электростатическая индукция – объёмное перераспределение электронов в металлических проводниках, помещённых в электрическое поле (электроны движутся в направлении противоположном вектору напряжённости внешнего поля), в результате чего на одной поверхности образца скапливается отрицательный заряд, а на противоположной поверхности образуется недостаток электронов, то есть возникает нескомпенсированный положительный заряд. Заряды, индуцированные на противоположных поверхностях образца, создают своё собственное поле, ориентированное противоположно внешнему. В результате так же, как в диэлектриках, происходит ослабление поля внутри вещества, но поскольку в металлах электроны свободные, этот процесс продолжается до тех пор, пока напряжённость внутреннего поля не сравняется с напряжённостью внешнего поля. Таким образом, *внутри металлического образца, помещённого во внешнее электростатическое поле, напряжённость результирующего поля всегда оказывается равной нулю*.

Распределение статического избыточного заряда в металлических проводниках. При сообщении избыточного заряда проводнику поле, созданное этим зарядом, приводит к перераспределению электронов внутри проводника. При этом:

– весь избыточный заряд распределяется по внешней поверхности проводника;

– плотность заряда зависит от кривизны поверхности и максимальна на остриях;

– напряжённость поля внутри проводника равна нулю;

– потенциал во всех точках поверхности одинаков (поверхность проводника эквипотенциальна);

– линии напряжённости поля, созданного заряженным проводником, вблизи проводника перпендикулярны его поверхности;

– потенциал проводника пропорционален величине сообщенного заряда.

Запишем связь между потенциалом и зарядом проводника в виде: $\varphi = \left(\frac{1}{C}\right) \cdot q,$ где C – электроёмкость – коэффициент, зависящий от геометрических размеров и формы проводника, электрических свойств окружающей среды (ε) и расположения других проводников. $C = \frac{q}{\varphi}$ – электроёмкость проводника показывает, какой заряд необходимо сообщить проводнику, чтобы изменить его потенциал на единицу (в системе СИ – на 1 Вольт).

▪ Электроёмкость уединенного шара радиусом R:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \cdot R. \tag{3.60}$$

В электро- и радиотехнике используются конденсаторы. Конденсатор – это система двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком и расположенных так, что электрическое поле сосредоточено только между обкладками (чтобы исключить влияние на электроёмкость других тел, расположенных вблизи конденсатора).

▪ Электроёмкость конденсатора:

$$C = \frac{|q|}{\Delta\varphi}, \tag{3.61}$$

где $|q|$ – заряд одной из обкладок по абсолютной величине; $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладками.

▪ Электроёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \tag{3.62}$$

где S – площадь одной пластины; d – расстояние между пластинами.

▪ Электроёмкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 L}{\ln R/r}, \tag{3.63}$$

где L – высота коаксиальных цилиндров; R и r – радиусы внешнего и внутреннего цилиндров соответственно.

▪ Электроёмкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 Rr}{R - r}, \tag{3.64}$$

где R и r – радиусы внешней и внутренней сферы соответственно.

▪ Энергия поля конденсатора:

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}, \tag{3.65}$$

где $U = \Delta\varphi$ – разность потенциалов (напряжение) между обкладками.

Таблица 3.1

Правила для последовательного и параллельного соединения конденсаторов

Последовательное соединение	***Параллельное соединение***
Заряд по абсолютной величине одинаков на всех обкладках конденсаторов $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots$	Напряжение одинаково на всех конденсаторах $U_1 = U_2 = U_3 = \ldots$
Общее напряжение равно сумме напряжений на отдельных конденсаторах $U_{об} = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$	Общий заряд батареи конденсаторов равен сумме зарядов всех конденсаторов $Q_{об} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots$
Величина обратная общей ёмкости системы равна сумме обратных величин ёмкостей отдельных конденсаторов $1/C_{об} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3 + \ldots$	Общая ёмкость системы конденсаторов равна сумме ёмкостей отдельных конденсаторов $C_{об} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$
Напряжения на отдельных конденсаторах распределяются обратно пропорционально их электроёмкостям $U_1/U_2 = C_2/C_1$	Заряды на отдельных конденсаторах распределяются прямо пропорционально их электроёмкостям $Q_1/Q_2 = C_1/C_2$

Металлические проводники в стационарном поле. Если на концах проводника поддерживать постоянную разность потенциалов (то есть создать стационарное поле), то на тепловое хаотическое движение электронов наложится упорядоченное движение под действием сил со стороны электрического поля и возникнет *ток проводимости*.

Плотность тока проводимости – это сила тока, приходящаяся на единицу площади поперечного сечения проводника, или заряд, переносимый по проводнику в единицу времени через единицу площади поперечного сечения проводника:

$$j = \frac{dI}{dS}, \text{ или при } j = \text{const:} \ j = \frac{I}{S} = \frac{Q}{St}. \qquad (3.66)$$

Связь плотности тока со средней скоростью $\langle \upsilon \rangle$ *направленного движения заряженных частиц*: $j = Q \cdot n \cdot \langle \upsilon \rangle$, где Q – заряд одной частицы; n – концентрация заряженных частиц (число частиц в единице объёма).

Упорядоченному движению электронов препятствуют их столкновения с ионами кристаллической решётки, в результате которых электроны теряют энергию, полученную от поля, передавая её ионам. Этим обусловлено возникновение *сопротивления проводников* и *нагревание вещества* при прохождении электрического тока. Для восполнения потерь энергии, вызванных наличием сопротивления проводников, в цепи должно существовать устройство, поддерживающее постоянную разность потенциалов – *источник тока*. Внутри источника происходит разделение положительных и отрицательных зарядов (вопреки силам их взаимного притяжения) за счёт действия сторонних сил, то есть сил не электростатического происхождения.

Электродвижущая сила источника тока (ЭДС) – физическая величина, характеризующая работу сторонних сил по разделению «+» и «–» зарядов в расчёте на единицу заряда:

$$\varepsilon = \frac{A^{\text{стор.сил}}}{q}. \qquad (3.67)$$

Расчет цепей постоянного тока. Движение электронов по участку цепи, содержащему источник (по неоднородному участку), происходит как под действием сил электрического поля, так и под действием сторонних сил, в этом случае справедлив закон Ома.

Закон Ома для неоднородного участка цепи: сила тока на участке цепи прямо пропорциональна алгебраической сумме ЭДС и разности потенциалов на этом участке и обратно пропорциональна полному сопротивлению участка:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{R}. \tag{3.68}$$

Величина $\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon = U$ называется *напряжение на участке цепи*.

Частные случаи этого закона:

1. *Закон Ома для однородного участка цепи* $(\varepsilon = 0)$ – сила тока на участке цепи не содержащем ЭДС, прямо пропорциональна разности потенциалов на этом участке и обратно пропорциональна сопротивлению участка:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}, \tag{3.69}$$

где R – сопротивление участка цепи;

$\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – для однородного участка цепи напряжение совпадает с разностью потенциалов.

2. *Закон Ома для замкнутой цепи* $(\varphi_1 = \varphi_2)$ – сила тока в цепи прямо пропорциональна ЭДС и обратно пропорциональна полному сопротивлению цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \tag{3.70}$$

где R – внешнее сопротивление цепи;

r – внутреннее сопротивление источника тока.

Таблица 3.2

Правила для последовательного и параллельного соединения проводников

Последовательное соединение	***Параллельное соединение***
Сила тока одинакова на всех участках цепи $I_1 = I_2 = I_3 = \ldots$	Напряжение одинаково на всех участках $U_1 = U_2 = U_3 = \ldots$
Общее напряжение равно сумме напряжений на отдельных участках цепи $U_{об} = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$	Общий ток в неразветвленной цепи равен сумме токов в отдельных ветвях $I_{об} = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$
Общее сопротивление равно сумме сопротивлений отдельных участков цепи $R_{об} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$	Величина обратная общему сопротивлению равна сумме обратных величин сопротивлений отдельных участков цепи $1/R_{об} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \ldots$
Напряжения на отдельных участках цепи распределяются прямо пропорционально сопротивлениям $U_1/U_2 = R_1/R_2$	Токи в отдельных ветвях цепи распределяются обратно пропорционально сопротивлениям $I_1/I_2 = R_2/R_1$

Расчёт цепей, не сводящихся к последовательному и параллельному соединениям производится на основе правил Кирхгофа, которые являются следствием закона Ома для неоднородного участка цепи.

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum(\pm)I_i = 0. \tag{3.71}$$

Примечания: а) узлом электрической цепи называется точка, в которой сходятся не менее трёх проводников с токами; б) положительными считаются токи, входящие в узел, отрицательными – выходящие из него; в) направления токов на отдельных участках цепи расставляются произвольно, но при этом надо следить, чтобы в любом узле были токи как входящие в него, так и выходящие из него.

Второе правило Кирхгофа: в любом замкнутом контуре электрической цепи алгебраическая сумма падений напряжения на всех участках равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся при обходе по контуру:

$$\sum(\pm)I_i R_i = \sum(\pm)\varepsilon_i. \tag{3.72}$$

Примечания: а) направление обхода по контуру (по часовой стрелке или против) выбирается произвольно; б) падение напряжения (I_iR_i) на участке замкнутого контура считается положительным, если направление тока в нём совпадает с выбранным направлением обхода по контуру; в) ЭДС считается положительной, если при переходе через источник в направлении обхода по контуру потенциал увеличивается (переход происходит от отрицательного полюса источника к положительному).

▪ Сопротивление R и проводимость G для проводника, имеющего одинаковое сечение по всей длине:

$$R = \frac{\rho l}{S}; \; G = \frac{\gamma S}{l}, \tag{3.73}$$

где ρ – удельное сопротивление; γ – удельная проводимость; l – длина проводника; S – площадь поперечного сечения проводника; ρ и γ – табличные величины, зависящие от химического состав вещества, из которого изготовлен проводник.

Кроме длины, сечения и материала проводника на его сопротивление влияет температура, причём для металлических проводников сопротивление линейно растёт при повышении температуры (при не слишком низких температурах).

▪ Зависимость сопротивления от температуры:

$$R_t = R_0 \cdot (1 + \alpha t), \tag{3.74}$$

где t – температура по шкале Цельсия; R_0 – сопротивление проводника при нуле градусов по Цельсию; α – температурный коэффициент сопротивления, зависящий от химического состава вещества, из которого изготовлен проводник (табличная величина).

▪ Работа, совершаемая при прохождении тока по проводнику:

$$A = IUt; \; A = I^2Rt; \; A = \frac{U^2 t}{R}. \tag{3.75}$$

Первая формула справедлива для любого участка цепи, на концах которого поддерживается напряжение U, последние две – для участка, не содержащего ЭДС.

▪ Мощность тока:

$$P = IU;\ P = I^2R;\ P = \frac{U^2}{R}. \qquad (3.76)$$

Закон Джоуля-Ленца: количество теплоты, выделяющееся при прохождении постоянного электрического тока по проводнику прямо пропорционально произведению квадрата силы тока на сопротивление проводника и на время, в течение которого идёт ток:

$$Q = I^2Rt. \qquad (3.77)$$

Если сила тока изменяется с течением времени и закон этого изменения известен, то количество теплоты находится путём интегрирования:

$$Q = \int I^2 Rdt. \qquad (3.78)$$

Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}, \qquad (3.79)$$

где γ – удельная проводимость; $\vec{E}$ – напряжённость электрического поля; $\vec{j}$ – плотность тока.

▪ Связь удельной проводимости γ с подвижностью b заряженных частиц (ионов):

$$j = Qn(b_+ + b_-), \qquad (3.80)$$

где Q – заряд иона; n – концентрация ионов; b_+ и b_- – подвижности положительных и отрицательных ионов.

3.4.2. Магнитные свойства вещества

По магнитным свойствам все вещества делятся на три группы: диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.

Каждый электрон, движущийся вокруг ядра атома можно рассматривать, как микроток, обладающий магнитным моментом $P_m^{\text{эл}}$. Поскольку количество электронов в атоме совпадает с порядковым номером химического элемента в таблице Менделеева, магнитный момент атома в целом (являющийся векторной суммой магнитных моментов электронов: $\vec{P}_m^{\text{ат}} = \sum \vec{P}_m^{\text{эл}}$ может оказаться равным нулю или не равным нулю.

Диамагнетики – вещества, атомы которых в отсутствие магнитного поля не обладают собственным магнитным моментом.

Парамагнетики – вещества, атомы которых в отсутствие магнитного поля обладают собственным магнитным моментом, но, вследствие теплового движения атомов, эти моменты ориентированы в пространстве хаотически так, что суммарный магнитный момент всего образца равен нулю.

Ферромагнетики – вещества, у которых существуют макрообласти спонтанного намагничивания – домены с размерами порядка (1–10) мкм. В отсутствие внешнего поля магнитные моменты доменов ориентированы хаотически, поэтому образец в целом не намагничен. Внешнее магнитное поле меняет состояние не отдельных атомов, а доменов, именно с этим связаны особые свойства ферромагнетиков (см. по тексту).

Диамагнетики в магнитном поле. При помещении вещества в магнитное поле в атомах помимо микротоков, обусловленных движением электронов вокруг ядра, возникают дополнительные (индуцированные) микротоки, магнитные моменты которых в соответствии с правилом Ленца направлены противоположно внешнему полю.

Намагничивание диамагнетиков – появление индуцированных микротоков у атомов диамагнетиков приводит к возникновению внутреннего магнитного поля, ориентированного противоположно внешнему, в результате чего поле в веществе оказывается слабее, чем в вакууме.

Вектор намагничивания (намагниченность) $\vec{J}$ – количественная мера степени намагниченности вещества, численно равная векторной сумме магнитных моментов атомов в единице объёма вещества.

Магнитная проницаемость вещества μ – количественная мера влияния вещества на характеристики магнитного поля, численно равная отношению индукции поля в веществе к индукции поля в вакууме:

$$\mu = \frac{B_{\text{вещ.}}}{B_0}. \tag{3.81}$$

Так как диамагнетики ослабляют поле, $\mu_{\text{диа}} < 1$.

Парамагнетики в магнитном поле. Диамагнитный эффект, в основе которого лежит явление электромагнитной индукции, характерен для всех веществ, однако в тех случаях, когда атомы обладают собственным магнитным моментом, он перекрывается значительно более сильным парамагнитным эффектом.

Намагничивание парамагнетиков – ориентация собственных магнитных моментов атомов в направлении внешнего магнитного поля приводит к появлению внутреннего магнитного поля, совпадающего по направлению с внешним, в результате чего результирующее поле внутри вещества усиливается.

Количественные характеристики процесса намагничивания парамагнетиков такие же, как для диамагнетиков, но поскольку парамагнетики усиливают поле, магнитная проницаемость для них принимает значения больше единицы: $\mu_{\text{пара}} > 1$.

Особые свойства ферромагнетиков:

– магнитная проницаемость ферромагнетиков имеет аномально большие значения: $\mu_{\text{ферро}} >> 1 \cdot (10^3–10^5)$;

– магнитная проницаемость ферромагнетиков не является постоянной величиной, как это имеет место для диа- и парамагнетиков, а зависит от параметров внешнего магнитного поля, поэтому находится для каждого вещества по специальным графикам;

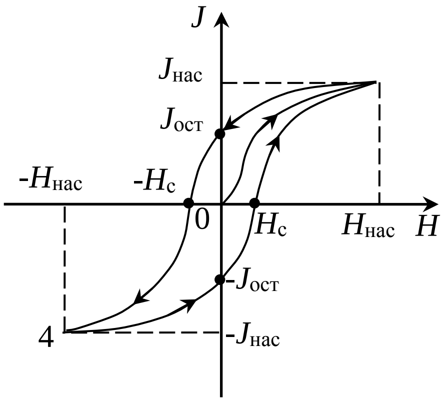

Рис. 3.15

– для ферромагнетиков характерен гистерезис – запаздывание изменений степени намагниченности по отношению к изменениям внешнего магнитного поля. Это выражается в том, что кривая намагничивания не совпадает с кривой размагничивания (см. рис. 3.15);

– самым ярким свойством ферромагнетиков является остаточная намагниченность – ферромагнетик остается намагниченным даже после вынесения из магнитного поля (постоянные магниты);

– каждый ферромагнетик имеет критическую температуру – точку Кюри, выше которой тепловое движение молекул разрушает домены и вещество теряет свои особые свойства, превращаясь в обычный парамагнетик.

3.5. Взаимосвязь электрического и магнитного полей. Полная система уравнений для электромагнитного поля

Анализируя и обобщая информацию о свойствах электрического и магнитного полей, Максвелл пришёл к выводу, что между ними существует неразрывная двусторонняя связь. Явление электромагнитной индукции возникает как следствие того, что переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, которое, действуя на электроны в проводнике, вызывает индукционный ток. По гипотезе Максвелла, существует и обратное явление – явление магнитоэлектрической индукции – переменное электрическое поле приводит к возникновению магнитного поля. Другими словами, мы всегда имеем дело с единым электромагнитным полем, но иногда в зависимости от условий наблюдения можем фиксировать либо электрическую, либо магнитную составляющую этого поля. Если заряженные частицы, создающие поле, неподвижны в выбранной системе отсчёта, то мы имеем дело с электростатическим полем, если заряженные частицы движутся – с магнитным полем. Если поля не стационарные и их характеристики изменяются с течением времени, то электрическая составляющая существует в виде вихревого электрического поля. Идея полевого электромагнитного взаимодействия приобрела завершенное математическое оформление в системе уравнений Максвелла.

На основании изложенных уравнений, Максвелл предсказал существование электромагнитных волн и их свойства.

Таблица 3.3

Система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме

Уравнение	***Информация о свойствах поля***
$\oint E_l^{\text{вих}} dl = -\int \left(\frac{dB}{dt} \right)_n dS$	1. Вихревое электрическое поле возникает всегда, когда есть переменное магнитное поле ((dB/dt)$\neq$0). 2. Поскольку циркуляция E по замкнутому контуру не равна нулю, вихревое электрическое поле не является потенциальным
$\oint E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho dV,$ где ρ – объёмная плотность заряда	1. Электрическое поле может быть создано статическими зарядами (ρ). 2. Поскольку поток E через замкнутую поверхность не равен нулю, электростатическое поле не является вихревым, его силовые линии не замкнутые
$\oint E_l^{\text{ст}} dl = 0$	1) Поскольку циркуляция E по замкнутому контуру равна нулю, электростатическое поле потенциально
$\oint B_l\, dl = \mu_0 \int \left(j + \varepsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt} \right)_n dS,$ где j – плотность тока проводимости	1. Магнитное поле может быть создано электрическим током (j). 2. Магнитное поле может быть создано переменным электрическим полем ((dE/dt)$\neq$0). 3. Поскольку циркуляция B по замкнутому контуру не равна нулю, магнитное поле не является потенциальным
$\oint B_n dS = 0$	Поскольку поток B через замкнутую поверхность равен нулю, магнитное поле является вихревым, его силовые линии замкнутые

В веществе под действием поля происходят изменения в расположении и характере движении микрочастиц, в результате чего возникают разнообразные явления: электризация, поляризация, намагничивание, электрический ток. Вещество, в свою очередь, влияет на характеристики поля. Таким образом, для полного описания электромагнитных взаимодействий помимо записанных уравнений Максвелла необходимы ещё две группы уравнений.

Уравнения, определяющие действие поля на находящиеся в нём заряды. Объединяя ранее рассмотренные силы, действующие на заряженную частицу со стороны электрического и магнитного поля, получим уравнение для обобщенной силы Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{\upsilon}, \vec{B}]. \qquad (3.82)$$

Материальные уравнения

Материальные уравнения – это уравнения, отражающие реакцию вещества на поле. Они связывают характеристики вещества, характеристики поля и характеристики явлений, возникающих в веществе под действием поля. Будем записывать эти уравнения для ситуации, когда среда, в которой существует поле однородная, изотропная и линейная. Последнее свойство означает, что изменения, происходящие в веществе, пропорциональны соответствующей характеристике поля:

– для металлов плотность тока пропорциональна напряжённости электрического поля:

$$j = \sigma \cdot E; \qquad (3.83)$$

– для диэлектриков вектор поляризации (поляризованность) пропорционален напряжённости электрического поля:

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E; \qquad (3.84)$$

– для магнетиков вектор намагничивания (намагниченность) пропорционален индукции магнитного поля:

$$J = \left(\frac{1}{\mu_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \cdot B. \qquad (3.85)$$

Уравнения (3.84) и (3.85) иногда преобразуют к виду:

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot E, \qquad (3.86)$$

$$B = \mu_0 \mu \cdot H, \qquad (3.87)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость вещества (для линейных сред – постоянная величина, не зависящая от напряжённости поля);

μ – магнитная проницаемость вещества (для линейных сред – постоянная величина, не зависящая от индукции поля);

σ – удельная проводимость вещества (для линейных сред – постоянная величина, не зависящая от напряжённости поля);

D – индукция электрического поля (вектор электрического смещения) – дополнительная характеристика электрического поля, описывающая внешнее поле, создаваемое свободными зарядами с учётом их перераспределения в пространстве, вызванного появлением индуцированных связанных зарядов в диэлектрике;

H – напряжённость магнитного поля – дополнительная характеристика магнитного поля, описывающая внешнее поле, создаваемое свободными токами.

3.6. Примеры решения задач по электрическому полю

Пример 1. Два точечных электрических заряда Q_1 = 2 нКл и Q_2 = –5 нКл находятся в воздухе на расстоянии d = 10 см друг от друга. Определить напряжённость E и потенциал φ поля, создаваемого этими зарядами в точке A, удалённой от заряда Q_1 на расстояние r_1 = 7 см и

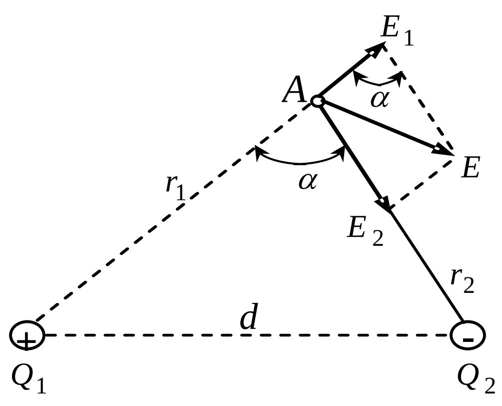

Рис. 3.16

от заряда Q_2 на r_2 = 5 см. Определить также силу F, действующую в точке A на точечный заряд $Q = 10$ нКл.

Решение. В данной задаче рассматривается ситуация, когда заряды Q_1 и Q_2 являются источниками электрического поля, а заряд Q находится в этом поле. Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создаёт поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряжённость $\vec{E}$ электрического поля в искомой точке может быть найдена как геометрическая сумма напряжённостей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Напряжённости электрического поля, создаваемого в воздухе ($\varepsilon = 1$) зарядами Q_1 и Q_2,

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}; \quad E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \tag{1}$$

Вектор $\vec{E}_1$ (см. рис. 3.16) направлен по силовой линии от заряда Q_1, так как этот заряд положителен; вектор $\vec{E}_2$ направлен также по силовой линии, но к заряду Q_2, так как этот заряд отрицателен.

Модуль вектора $\vec{E}$ найдём по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha}, \tag{2}$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, который может быть найден из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d:

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}. \tag{3}$$

Подставляя выражение E_1 и E_2 из (1) в (2) и вынося общий множитель $1/(4\pi\varepsilon_0)$ за знак корня, получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} - 2\frac{|Q_1||Q_2|}{r_1^2r_2^2}\cos\alpha}. \tag{4}$$

В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей, потенциал φ результирующего поля, создаваемого двумя зарядами Q_1 и Q_2, равен алгебраической сумме потенциалов:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{5}$$

Потенциал электрического поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом Q на расстоянии r от него, выражается формулой

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{6}$$

В нашем случае согласно формулам (5) и (6) получим

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2},$$

или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right).$$

Сила, действующая на точечный заряд Q, находящийся в электрическом поле в точке A

$$F = QE,$$

где напряжённость находится из выражения (4).

Произведём вычисления:

$$\cos\alpha = \frac{(0{,}07)^2 + (0{,}05)^2 - (0{,}1)^2}{2 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}07} = -0{,}371$$

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \sqrt{\frac{(2 \cdot 10^{-9})^2}{(0{,}07)^4} + \frac{(5 \cdot 10^{-9})^2}{(0{,}05)^4} + 2\frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 5 \cdot 10^{-9}}{0{,}07^2 \cdot 0{,}05^2}(0{,}371)} =$$
$$= 95{,}2 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 95{,}2 \text{ кВ/м};$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{2 \cdot 10^{-9}}{0{,}07} + \frac{-5 \cdot 10^{9}}{0{,}05}\right) = -257 \text{ В};$$

$$F = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 95{,}2 \cdot 10^3 = 952 \cdot 10^{-6} \text{Н} = 0{,}95 \text{ мН}$$

Ответ: $E = 95{,}2$ кВ/м; $\varphi = -257$ В; $F = 0{,}95$ мН.

Пример 2. Определить напряжённость электрического поля, созданного бесконечной равномерно заряженной (с линейной плотностью заряда $+\tau$) нитью, в точке *A*, находящейся на расстоянии *a* от нити симметрично относительно её концов.

Решение. В данной задаче электрическое поле создаётся бесконечно заряженной нитью, заряд которой линейно распределён. Разобьём нить на элементы длиной dl так, чтобы заряд, сосредоточенный на одном элементе, можно было считать точечным. Величина этого заряда $dq = \tau dl$, численное значение напряжённости электрического поля, созданного в точке *A* этим элементом нити определим по формуле для точечного заряда $dE = k\dfrac{\tau dl}{r^2}$. Направление вектора dE показано на рис. 3.17.

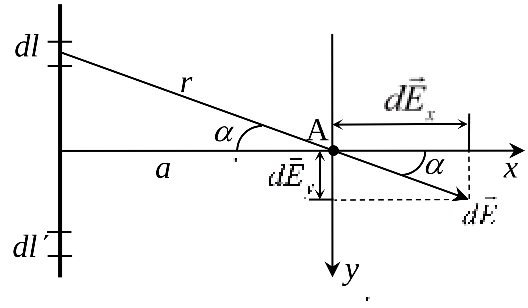

Рис. 3.17

По принципу суперпозиции, напряжённость $\vec{E}$ найдём интегрированием:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}.$$

Направления $d\vec{E}$ от разных элементов нити не совпадают, поэтому спроектируем $d\vec{E}$ на координатные оси, и найдём сумму проекций по каждой оси в отдельности:

$$E_x = \int dE_x = \int dE \cos\alpha;$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \sin\alpha.$$

Модуль вектора напряжённости равен $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$.

$$E_x = \int k\frac{\tau dl}{r^2}\cos\alpha. \qquad (1)$$

Под интегралом три переменных *l*, *r* и *a*, находим

$$r = \frac{a}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

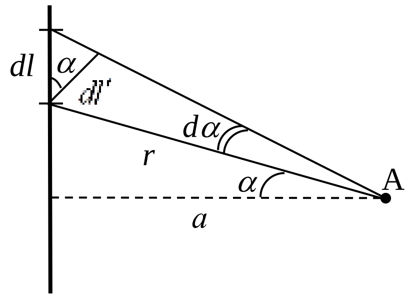

Рис. 3.18

Чтобы связать переменные dl и α, сделаем дополнительные построения (рис. 3.18): соединим концы отрезка dl с точкой A, получим угол $d\alpha$ который можно рассматривать как приращение угла α, когда радиус-вектор r скользит по нити и переходит от нижнего конца отрезка dl к верхнему.

Рассмотрим сначала вспомогательный отрезок dl', расположенный перпендикулярно r: $dl' \approx rd\alpha$ (т. к. угол $d\alpha$ мал). Из прямоугольного треугольника, элементами которого являются dl и dl':

$$dl = \frac{dl'}{\cos\alpha} = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha},$$

используя (2), получаем

$$dl = \frac{ad\alpha}{\cos^2\alpha}. \qquad (3)$$

Подставляем (2) и (3) в (1), получим

$$E_x = k\frac{\tau}{a}\int\cos\alpha d\alpha.$$

При интегрировании по всей длине нити угол α будет меняться в пределах от $-\pi/2$ до $+\pi/2$ (т. к. α отсчитывается от оси x, а нить бесконечная и её концы расположены симметрично относительно точки A).

$$E_x = k\frac{\tau}{a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha\cdot d\alpha = k\frac{\tau}{a}[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)] = k\frac{2\tau}{a}. \qquad (4)$$

Аналогично можно найти $E_y = \int k\frac{\tau dl}{r^2}\sin\alpha$. Результат сложения проекций можно предугадать сразу из соображений симметрии. Для симметричных элементов dl и dl' проекции dE на ось y имеют противоположные знаки и в сумме дают ноль (см. рис. 3.17). Точно так же можно рассуждать и в отношении любой другой пары симметричных элементов, поэтому $E_y = \int dE_y = 0$. Модуль вектора напряжённости равен $E=\sqrt{E_x^2+E_y^2}$ (из рис.3.17 видно, что $E_z=0$). Используя (4), получаем

$$E_{\text{нити}}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}. \qquad (5)$$

Проверим выражение (5) по размерности

$$[E_{\text{нити}}]=\frac{[\tau]}{[\varepsilon_0][a]}=\frac{[\text{Кл/м}]}{[\text{Ф/м}][\text{м}]}=\frac{\text{Кл}}{\text{Ф}\cdot\text{м}}=\frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Ответ: $E_{\text{нити}}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}$.

Пример 3. На тонком стержне длиной l = 10 см находится равномерно распределённый электрический заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии a = 5 см от ближайшего конца находится точечный заряд Q_1 = 40 нКл, который взаимодействует со стержнем с силой F = 6 мкН. Определить линейную плотность τ заряда на стержне. Найти потенциал φ в точке A, расположенной на оси стержня и удалённой от его ближайшего конца на расстояние l.

Решение *(1 часть)***.** Для определения линейной плотности заряда стержня предположим, что заряженный стержень создаёт поле, а заряд Q_1 является индикатором поля. Сила взаимодействия F между ними определяется выражением

$$\vec{F}=Q_1\vec{E}, \qquad (1)$$

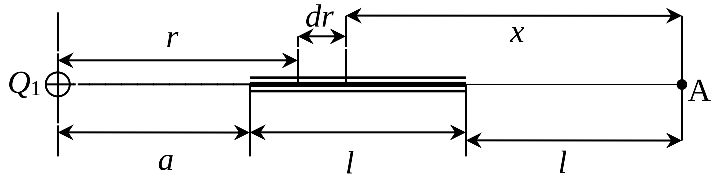

Рис. 3.19

где $\vec{E}$ – напряжённость поля, созданного стержнем в точке, где расположен заряд Q_1.

Для определения напряжённости выделим на стержне элемент длиной dr с зарядом $dQ = \tau dr$ (см. рис. 3.19). Этот заряд можно рассматривать как точечный, тогда численное значение напряжённости в этой точке определим по формуле для точечного заряда:

$$dE = \frac{\tau dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (2)$$

По принципу суперпозиции напряжённость $\vec{E}$ найдем интегрированием:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}. \qquad (3)$$

Направления $d\vec{E}$ от разных элементов стержня совпадают по направлению. Подставим (2) в (3), и интегрируя это выражение в пределах от a до $a + l$, получаем:

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^{a+l}\frac{dr}{r^2} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right) = \frac{\tau l}{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)},$$

Согласно (1), сила взаимодействия равна $F = \frac{Q_1\tau \cdot l}{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)}$, откуда

$$\tau = \frac{4\pi\varepsilon_0 a(a+l)F}{Q_1 l}.$$

Проверим, даёт ли расчётная формула единицу линейной плотности электрического заряда. Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы:

$$\frac{[\varepsilon_0][a][a+l][F]}{[Q][l]} = \frac{\text{Ф/м}\cdot\text{м}\cdot\text{м}\cdot\text{Н}}{\text{К}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Ф}\cdot\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Кл/В}\cdot\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Н}}{\text{В}} = \frac{\text{Н}}{\text{Дж/Кл}} =$$
$$= \frac{\text{Н}\cdot\text{Кл}}{\text{Н}\cdot\text{м}} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$

Найденная единица является единицей линейной плотности заряда. Произведём вычисления:

$$\tau = \frac{0{,}05\cdot(0{,}05+0{,}1)\cdot 6\cdot 10^{-6}}{9\cdot 10^9\cdot 4\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}1} = 1{,}25\cdot 10^{-9}\,\text{Кл/м}.$$

Решение *(2 часть)*. Электрическое поле в точке A создают точечный заряд Q_1 и заряженный стержень. Потенциал в этой точке по принципу суперпозиции является суммой потенциалов, созданных точечным зарядом Q_1 и стержнем с распределённым зарядом:

$$\varphi_A = \varphi_Q + \varphi_l, \tag{4}$$

где $\varphi_Q = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0(a+2l)}$ – потенциал в точке A, созданный зарядом Q_1, а φ_l – потенциал в точке A, созданный стержнем.

Потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом $dQ = \tau dx$ в точке A, можно определить по формуле точечного заряда

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, потенциал электрического поля, создаваемого заряженным стержнем в точке A, найдём интегрированием этого выражения:

$$\varphi_l = \int_l^{2l} \frac{\tau dx}{4\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int_l^{2l} \frac{dx}{x}.$$

Выполним интегрирование:

$$\varphi_l = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln x \Big|_l^{2l} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln 2. \tag{5}$$

Подставим (5) в (4):

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{a+2l} + \tau \ln 2\right).$$

Подставим числовые значения физических величин в СИ ($1/(4\pi\varepsilon_0)$ = $9 \cdot 10^9$ м/Ф, Q_1 = $4\ 10^{-8}$ Кл, l = 10^{-1}м, a = $5 \cdot 10^{-2}$ м, τ =$10\ 10^{-9}$ Кл/м) и произведём вычисления:

$$\varphi = 9 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10^{-8}}{25 \cdot 10^{-2}} + 1{,}25 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}693\right) = 7{,}8 \text{ В}.$$

Ответ: $\tau = 1{,}25 \cdot 10^{-9}$ Кл/м; φ = 7,8 В.

Пример 4. Определить напряжённость электрического поля бесконечной плоскости равномерно заряженной, с поверхностной плотностью заряда σ в точке *A*, находящейся на расстоянии *a*.

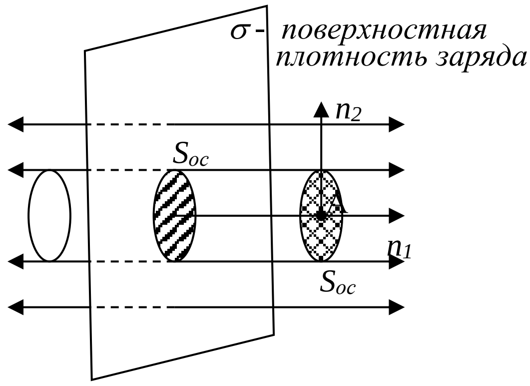

Рис. 3.20

Решение. В данной задаче плоскость является источником электрического поля, конфигурация силовых линий которого изображена на рис. 3.20. Для определения напряжённости *E* воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса для электростатики

$$\oint E_n dS = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}. \quad (1)$$

Проведём вспомогательную гауссову поверхность *S*. Из соображений симметрии, вспомогательную поверхность выбираем так, чтобы она содержала две плоскости, параллельные заряженной, например, цилиндр, ось которого располагается параллельно силовым линиям, а основания симметрично относительно заряженной плоскости и одно из них проходит через точку *A*.

Определим поток через выбранную поверхность:

$$\oint E_n dS = \int\limits_{2\,\text{осн.}} E_{n_1} dS + \int\limits_{\text{бок.}} E_{n_2} dS = \int\limits_{2\,\text{осн.}} E dS = E \int\limits_{2\,\text{осн.}} dS = E \cdot 2S_{\text{осн.}}, \quad (2)$$

где проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль к основанию цилиндра $E_{n_1} = E = const$ в пределах $S_{\text{осн}}$, а проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль к боковой поверхности $E_{n_2} = 0$.

Заряд сосредоточен на участке плоскости, который вырезается цилиндром (заштрихованный участок плоскости) равен

$$\left(\sum q\right)_{\text{внури}} = \sigma \cdot S_{\text{осн}}. \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$E \cdot 2S_{\text{осн}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma \cdot S_{\text{осн}},$$

откуда

$$E_{\text{плоскости}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Проверим полученное выражение по размерности:

$$[E_{\text{плоскости}}] = \frac{[\sigma]}{[\varepsilon_0]} = \frac{[\text{Кл/м}^2]}{[\text{Ф/м}]} = \frac{[\text{Кл}]}{[\text{Ф} \cdot \text{м}]} = \left[\frac{\text{В}}{\text{м}}\right].$$

Ответ: $E_{\text{плоскости}} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

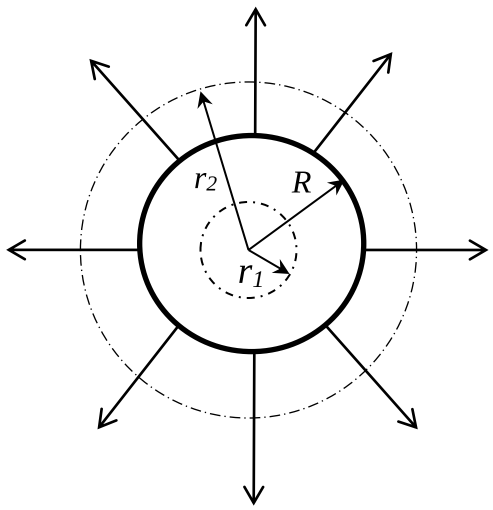

Рис. 3.21

Пример 5. Шар радиусом R = 10 см заряжен равномерно с объёмной плотностью зарядов ρ = 15 нКл/м^3. Определить напряжённость поля в точках 1 и 2, лежащих на расстояниях $r_1 = 5$ см, $r_2 = 15$ см от центра шара (см. рис. 3.21).

Решение. В данной задаче электрическое поле создано зарядом, равномерно распределённым по объёму. Конфигурация зарядов позволяет считать, что поле обладает сферической симметрией: силовые линии − прямые выходящие из центра шара (заряд шара считается положительным). Вспомогательные гауссовы поверхности выбираем сферической формы. Характер функциональной зависимости $E(r)$ для точек, лежащих внутри и вне объёмного заряда, различен. Поэтому следует провести две вспомогательные сферические поверхности S_1 и S_2 с радусами $r_1 < R$ и $r_2 > R$.

Определим поток через выбранную сферическую поверхность:

$$\oint E_n dS = \int\limits_{\text{сферы}} EdS = E \int\limits_{\text{сферы}} dS = ES' = E4\pi r^2, \tag{1}$$

где $E_n = E = const$ – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль к поверхности сферы.

Заряд, попадающий внутрь выделенной поверхности

а) внутри шара при $r_1 < R$:

$$\sum Q = \int \rho d\mathrm{V} = \rho \int\limits_0^{\frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3} d\mathrm{V} = \frac{4}{3}\rho\pi r_1^3; \tag{2а}$$

б) вне шара при $r_2 > R$:

$$\sum Q = \int \rho d\mathrm{V} = \rho \int\limits_0^{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3} d\mathrm{V} = \frac{4}{3}\rho\pi \cdot R^3. \tag{2б}$$

Воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса для электростатики:

$$\oint E_n dS = \frac{\sum q}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Подставляя (1) и (2) в (3), получим:

$E_1 4\pi r_1^2 = \dfrac{4\rho\pi r_1^3}{3\varepsilon_0}$ – внутри шара; $E_2 4\pi r_2^2 = \dfrac{4\rho\pi R^3}{3\varepsilon_0}$ – вне шара.

Откуда напряжённость внутри шара:

$$E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}, \tag{4}$$

напряжённость вне шара:

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2^2}. \tag{5}$$

Проверим выражение (4) и (5) по размерности

$$[E_1] = \frac{[\rho][r]}{[\varepsilon_0]} = \frac{[\text{Кл/м}^3][\text{м}]}{[\text{Ф/м}]} = \frac{\text{Кл}}{\text{Ф} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$[E_2] = \frac{[\rho][R]^3}{[\varepsilon_0][r]^2} = \frac{[\text{Кл / м}^3][\text{м}]^3}{[\text{Ф / м}][\text{м}]^2} = \frac{\text{Кл}}{\text{Ф} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Произведём вычисления:

$$E_1 = \frac{15\cdot 10^{-9}\cdot 5\cdot 10^{-2}}{3\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 28{,}2\ \text{В/м}\ ;\ E_2 = \frac{15\cdot 10^{-9}\cdot (10^{-1})^3}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot (15\cdot 10^{-2})^2} = 25{,}1\ \text{В/м}\ .$$

Ответ: $E_1 = 28{,}2$ В/м ; $E_2 = 25{,}1$ В/м .

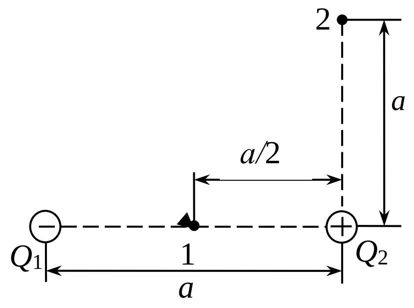

Рис. 3.22

Пример 6. Электрическое поле создаётся двумя зарядами Q_1 = 4 мкКл и Q_2 = –2 мкКл, находящимися на расстоянии a = 0,1 м друг от друга. Определить работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда Q = 50 нКл из точки 1 в точку 2 (см. рис. 3.22).

Решение. В данной задаче электрическое поле создаётся зарядами Q_1 и Q_2, а заряд Q есть пробный заряд, помещённый в это поле. Для определения работы $A_{1,2}$ сил поля воспользуемся соотношением

$$A_{1,2} = Q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где $\varphi_{1\,1}$ и φ_2 – потенциалы точек 1 и 2 поля. По принципу суперпозиции электрических полей, потенциалы в этих точках определяются, как алгебраическая сумма потенциалов созданных точечными зарядами Q_1 и Q_2:

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a/2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a/2} = \frac{2(Q_1 + Q_2)}{4\pi\varepsilon_0 a};$$

$$\varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{(Q_1/\sqrt{2}) + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

Тогда

$$A_{1,2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}[2(Q_1 + Q_2) - (Q_1/\sqrt{2} + Q_2)],$$

или

$$A_{1,2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[Q_1\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Q_2\right].$$

Проверим, даёт ли правая часть равенства единицу работы (Дж):

$$\frac{[Q][Q_1]}{[\varepsilon_0][a]} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{Кл}}{\text{Ф/м}\cdot\text{м}} = \text{Кл}\cdot\text{В} = \text{Дж}.$$

Подставим числовые значения физических величин в СИ: $Q = 50\cdot10^{-9}$ Кл, $Q_1 = 4\cdot10^{-6}$ Кл, $Q_2 = 2\cdot10^{-6}$ Кл, $a = 0{,}1$ м, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\,\frac{\text{м}}{\text{Ф}}$

и произведём вычисления:

$$A_{1,2} = \frac{50\cdot10^{-9}\cdot9\cdot10^9}{0{,}2}\left[4\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-2\right]\cdot10^{-6}\,\text{Дж} = 14{,}3\ \text{мДж}.$$

Ответ: $A_{1,2} = -14{,}3$ мДж.

Пример 7. В пространство между пластинами плоского конденсатора влетает электрон со скоростью $\upsilon_0 = 2\cdot10^7$ м/с, направленной параллельно его пластинам, расстояние между которыми $d = 2$ см, разность потенциалов $U = 200$ В. На какое расстояние Δd по направлению к положительно заряженной пластине сместится электрон за время движения, если длина пластины конденсатора $l = 5$ см? Какова скорость электрона при вылете из конденсатора?

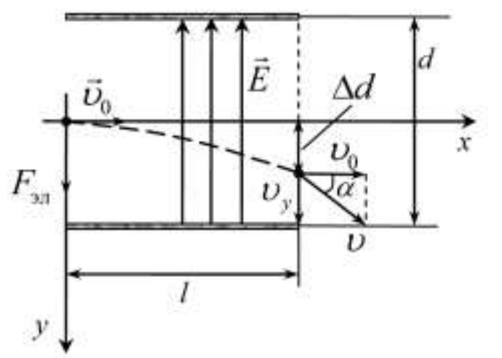

Рис. 3.23

Решение. В задаче рассматривается сложное криволинейное движение электрона в электрическом поле конденсатора. На основании принципа независимости движений его можно представить состоящим из двух движений – по горизонтали (по оси x) и по вертикали (по оси y). Характер поступательного движения определяется на основе II закона Ньютона, а конкретные параметры движения на основе кинематических законов.

II закон Ньютона: $\sum\vec{F} = m\vec{a}.$ На электрон действует единственная сила со стороны электрического поля: $\vec{F}_{эл} = e\vec{E}.$ Поскольку напряжённость поля направлена вверх, а заряд электрона отрицательный, $\vec{F}_{эл}$ направлена вниз и по модулю равна

$$F_{эл} = |e|E. \tag{1}$$

В проекциях на координатные оси:

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}.$$

По рис. 3.23 видно, что $F_x = 0;\ F_y = F_{эл} = eE,$ тогда: $a_x = 0$ – движение по оси *x* равномерное; $a_y = \dfrac{eE}{m} = const$ – движение по оси у равнопеременное.

Запишем кинематические законы для этих видов движения:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_0 = const \ (2) \\ l = \upsilon_x \cdot t = \upsilon_0 t \ (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon_y = a_y t = \dfrac{eEt}{m} \ (4) \\ \Delta d = \dfrac{a_y t^2}{2} = \dfrac{eEt^2}{2m} \ (5) \end{cases}$$

Модуль скорости определяется выражением:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + \left(\frac{eEt}{m}\right)^2}, \tag{6}$$

а направление $\vec{\upsilon}$ при вылете из конденсатора по отношению к направлению $\vec{\upsilon}_0$ определяется углом α (рис. 3.23), причём

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = \frac{eEt}{m\upsilon_0},$$

Откуда

$$\alpha = arctg\frac{eEt}{m\upsilon_0}. \tag{7}$$

Учитывая, что для однородного электрического поля $E = \dfrac{U}{d}$ и электрон проходит расстояние l за время $t = \dfrac{l}{\upsilon_0}$ из (3), уравнения (5), (6) и (7) запишем в виде:

$$\Delta d = \frac{eUl^2}{2md\upsilon_0^2};$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + \left(\frac{eUl}{md\upsilon_0}\right)^2};$$

$$\alpha = arctg\,\frac{eUl}{md\upsilon_0^2}.$$

Проверим полученные выражения по единицам измерения

$$[\Delta d] = \frac{[e][U][l]^2}{[m][d][]\upsilon]^2} = \frac{[Кл][B][м]^2}{[кг][м][м/с]^2} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{В}}{\text{кг}\cdot\text{м/с}^2} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Н}} = \text{м}$$

$$[\upsilon] = \sqrt{([\upsilon_0])^2 + \left(\frac{[e][U][L]}{[d][m][\upsilon]}\right)^2} = \sqrt{\left(\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]\right)^2 + \left(\frac{[\text{Кл}][\text{В}][\text{м}]}{[\text{м}][\text{кг}][\text{м/с}]}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 + \left(\frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Нс}}\right)^2} = \text{м/с}.$$

Проведем вычисления:

$$\Delta d = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19} 2\cdot 10^2\cdot(5\cdot 10^{-5})^2}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31} 2\cdot 10^{-2}(2\cdot 10^7)^2} = 5{,}5\cdot 10^{-3}\text{м},$$

$$\upsilon = \sqrt{(2\cdot 10^7)^2 + \left(1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^2 5\cdot 10^{-2}/2\cdot 10^{-2} 9{,}1\cdot 10^{-31} 2\cdot 10^7\right)^2} =$$
$$= \sqrt{2\cdot 10^7)^2 + (0{,}44\cdot 10^7)} = 2{,}05\cdot 10^7\text{м/с},$$

$$\alpha = \text{arctg}\frac{0{,}44}{2} = \text{arctg}0{,}22 = 12{,}4^\circ.$$

Ответ: $\Delta d = 5{,}5\cdot 10^{-3}$ м, $\upsilon = 2{,}05\cdot 10^7$ м/с, $\alpha = 12{,}4^\circ$.

Пример 8. Определить ускоряющую разность потенциалов *U*, которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью $\upsilon_1 = 3\cdot 10^6$м/с, чтобы скорость его возросла в n = 3 раза.

Решение. В данной задаче рассматривается движущийся поступательно в электрическом поле электрон. На него действует электрическая сила, под действием которой он движется равноускорено против направления поля. При этом электрическая сила будет совершать работу по перемещению электрона против поля, равную изменению кинетической энергии электрона:

$$A=\Delta W_k=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}, \qquad (1)$$

где m – масса электрона; υ_1 и υ_2 – начальная и конечная скорости его.

Ускоряющую разность потенциалов можно найти, вычислив работу A сил электростатического поля. Эта работа определяется произведением элементарного заряда e на разность потенциалов U:

$$A=eU. \qquad (2)$$

Работа сил электростатического поля в данном случае равна изменению кинетической энергии электрона. Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим:

$$eU=\frac{m\upsilon_2^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2}=\frac{mn^2\upsilon_1^2}{2}-\frac{m\upsilon_1^2}{2},$$

где $n=\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$.

Отсюда искомая разность потенциалов $U=\frac{m\upsilon_1^2(n^2-1)}{2e}$.

Проверим выражение это по размерности:

$$[U]=\frac{[m][\upsilon]^2}{[e]}=\frac{[\text{кг}][\text{м/с}]^2}{[\text{Кл}]}=\frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}=\text{В}.$$

Произведем вычисления:

$$U=\frac{9{,}1\cdot10^{-31}\cdot(3\cdot10^6)^2(3^2-1)}{2\cdot1{,}6\cdot10^{-19}}=204{,}7\ \text{В}.$$

Ответ: U=204,7 В.

Пример 9. Пластины плоского конденсатора изолированы друг от друга слоем диэлектрика. Конденсатор заряжен до разности потенциалов 1 кВ и отключен от источника напряжения. Определите диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если при его удалении разность потенциалов между пластинами конденсатора возрастает до 3 кВ.

Решение. В данной задаче рассматривается влияние диэлектрика на ёмкость конденсатора. Поскольку конденсатор отключен от источника напряжения, то его заряд в обоих случаях будет одинаковым: $q_1 = q_2$. Принимая во внимание, что $q_1 = U_1C_1$ и $q_2 = U_2C_2$, находим $U_1C_1 = U_2C_2$. Учитывая, что для ёмкости плоского конденсатора $C_1 = \varepsilon_1\varepsilon_0 S/d$ и $C_2 = \varepsilon_2\varepsilon_0 S/d$, получаем

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Тогда $U_1/U_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2$, откуда $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \dfrac{U_2}{U_1}$.

Произведём вычисления: $\varepsilon_1 = \dfrac{3\cdot 10^3}{10^3} = 3$.

Ответ: $\varepsilon_1 = 3$.

Пример 10. Конденсатор ёмкостью C_1 = 6 мкФ был заряжен до разности потенциалов U_1 = 20 В. После отключения от источника тока конденсатор соединили параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью C_2 = 10 мкФ. Какая энергия W' израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

Решение. В данной задаче рассматриваются конденсаторы, устройства для накопления электрического заряда. Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{1}{2}CU^2, \qquad (1)$$

где C – ёмкость конденсатора или батареи конденсаторов.

Энергия, израсходованная на образование искры:

$$W' = W_1 - W_2, \qquad (2)$$

где W_1 – энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора; W_2 – энергия, которую имеет батарея, составленная из двух конденсаторов.

Выразив в формуле (2) энергии W_1 и W_2 по формуле (1) и приняв во внимание, что общая ёмкость параллельно соединённых конденсаторов равна сумме ёмкостей отдельных конденсаторов, получим

$$W' = \frac{1}{2}C_1U_1^2 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_2^2, \tag{3}$$

где U_2 – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд после присоединения второго конденсатора остался прежним, выразим разность потенциалов U_2 следующим образом:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1U_1}{C_1 + C_2}.$$

Подставив выражение U_2 в (3), найдём

$$W' = \frac{C_1U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2)C_1^2U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2},$$

или

$$W' = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}U_1^2.$$

Проверим полученное выражение по размерности:

$$W' = \frac{[C_1C_2]}{[C_1 + C_2]}[U]^2 = \frac{[\Phi]^2}{[\Phi]}[B]^2 = \text{Ф} \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}\text{В}^2 = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Дж}.$$

Произведём вычисления:

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{6 \cdot 10^{-6} + 10 \cdot 10^{-6}} 400\,\text{Дж} = 750\,\text{мкДж}.$$

Ответ: W' =750 мкДж.

Пример 11. Определите ЭДС и внутреннее сопротивление r аккумулятора, если он даёт во внешнюю цепь 9,5 Вт при силе тока 5 А, а при силе тока 8А – 14,4 Вт. Найдите К.П.Д. цепи в первом и во втором случае.

Решение. В данной задаче рассмотрена замкнутая цепь постоянного тока. Силы тока I_1 и I_2 определим по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}, \; I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}, \tag{1}$$

где ε – ЭДС аккумулятора; r – его внутреннее сопротивление, а сопротивление R_1 и R_2 называются внешними. Найдём их из определения полезной мощности $P = I^2 R$, откуда

$$R_1 = P_1 / I_1^2, \; R_2 = P_2 / I_2^2.$$

С учётом этих соотношений уравнения (1) примут вид:

$$\varepsilon = I_1\left(\frac{P_1}{I_1^2} + r\right), \; \varepsilon = I_2\left(\frac{P_2}{I_2^2} + r\right).$$

Решая совместно эти два уравнения, получаем

$$r(I_2 - I_1) = \frac{P_1}{I_1} - \frac{P_2}{I_2} = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2}.$$

Отсюда окончательно:

$$r = \frac{P_1 I_2 - P_2 I_1}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)}, \; \varepsilon = \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)}.$$

К.П.Д. есть отношение полезной мощности, выделяемой на нагрузке к полной мощности

$$\eta_1 = \frac{P_1}{\varepsilon I_1}, \; \eta_2 = \frac{P_2}{\varepsilon I_2}.$$

Проверим полученные выражения по размерности:

$$[r] = \frac{[P_1][I_1] - [P_2][I_1]}{[I_1][I_2]([I_2] - [I_1])} = \frac{[\text{Вт}][\text{А}] - [\text{Вт}][\text{А}]}{[\text{А}][\text{А}][\text{А}]} = \frac{\text{Вт}}{\text{А}^2} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{А}^2} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом},$$

$$\varepsilon = \frac{P_1 I_2^2 - P_2 I_1^2}{I_1 I_2 (I_2 - I_1)} = \frac{[\text{Вт}]\left[\text{А}^2\right]}{[\text{А}][\text{А}][\text{А}]} = \frac{\text{Вт}}{\text{А}} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{А}} = \text{В},$$

$$[\eta] = \frac{[P]}{[\varepsilon][I]} = \frac{[\text{Вт}]}{[\text{В}][\text{А}[} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{В} \cdot \text{А}} = 1.$$

Произведём вычисления:

$$r=\frac{9{,}5\cdot 8-14{,}4\cdot 5}{5\cdot 8(8-5)}\approx 0{,}03\text{ Ом},\ \ \varepsilon=\frac{9{,}5\cdot 8^2-14{,}4\cdot 5^2}{5\cdot 8(8-5)}\approx 2{,}1\text{ В}.$$

$$\eta_1=\frac{9{,}5}{2{,}1\cdot 5}=0{,}9,\ \ \eta_2=\frac{14{,}4}{2{,}1\cdot 8}=0{,}85.$$

Ответ: $r\approx 0{,}03$ Ом; $\varepsilon\approx 2{,}1$ В; $\eta_1 = 0{,}9$; $\eta_2 = 0{,}85$.

3.7. Примеры решения задач по магнитному полю

Пример 1. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого круговым витком, по которому течёт ток, в центре витка. Радиус витка – 5 см.

Решение. В данной задаче источником магнитного поля является круговой виток, по которому течёт ток I. Разобьём виток на маленькие элементы длиной dl и найдём индукцию от одного такого элемента по закону Био – Савара – Лапласа $dB=k'\dfrac{Idl}{r^2}\sin\alpha$. Угол между элементом тока Idl и r равен $\alpha=90^\circ$, $\sin 90^\circ=1$, следовательно $dB=k'\dfrac{Idl}{r^2}$, $r = R$. По принципу суперпозиции:

$$\vec{B}=\int d\vec{B}. \qquad (1)$$

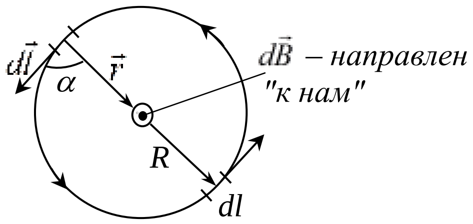

Рис. 3.24

Все векторы $d\vec{B}$ от разных элементов витка направлены по одной прямой в одну сторону «к нам», тогда на основании (1):

$$B=\int dB=\int k'\frac{Idl}{r^2}=k'\frac{I}{R^2}\int_0^{2\pi R}dl=k'\frac{I}{R^2}l\Big|_0^{2\pi R}=k'\frac{I2\pi R}{R^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I2\pi}{R}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \qquad (2)$$

Проверим выражение (2) по размерности:

$$[B]=\frac{[\mu_0][I]}{[R]}=\frac{[\text{Гн/м}][\text{А}]}{[\text{м}]}=\frac{[\text{Вб/А}][A]}{[\text{м}]^2}=\frac{\text{Тл}\cdot\text{м}^2}{\text{м}^2}=\text{Тл}.$$

Произведём вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 2{,}51 \cdot 10^{-5}\text{Тл}.$$

Ответ: $B = 2{,}51 \cdot 10^{-5}\text{Тл}$.

Пример 2. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током 5 А, в точке *A*, отстоящей от оси проводника на расстоянии 2,5 см.

Решение. В данной задаче источником магнитного поля является бесконечно длинный прямой проводник, по которому течёт ток *I*. На рис. 3.25 изображена конфигурация силовых линий этого поля. Для определения магнитной индукции в точке *A* применим теорему о циркуляции $\oint B_l dl = \mu_0 \sum(\pm I)$, где $\oint B_l dl$ – циркуляция вектора *B* по замкнутому контуру, $\sum(\pm I)$ – сумма токов, охватываемых этим контуром.

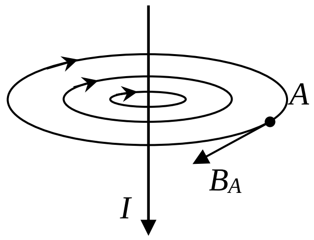

Рис. 3.25

В качестве замкнутого контура выберем окружность, совпадающую с силовой линией, проходящей через точку *A*. Спроектируем вектор $\vec{B}$ на касательную к контуру, в пределах контура интегрирования $B_l = B = const$. Циркуляция по выбранному контуру равна:

$$\oint B_l dl = B \int_0^{2\pi r} dl = B \cdot l \Big|_0^{2\pi r} = 2\pi r B.$$

Внутри выбранного контура находится только ток *I*, т. е. $\sum(\pm I) = I$. Применим теорему о циркуляции $2\pi r B = \mu_0 I$, следовательно

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Проверим полученное выражение по размерности:

$$[B] = \frac{[\mu_0][I]}{[r]} = \frac{[\text{Гн/м}][\text{А}]}{[\text{м}]} = \frac{[\text{Вб/А}][\text{А}]}{[\text{м}]^2} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2} = \text{Тл}.$$

Произведём вычисления:

$$B = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-2}} = 2{,}51 \cdot 10^{-5}\text{Тл}.$$

Ответ: $B = 4 \cdot 10^{-5}$Тл.

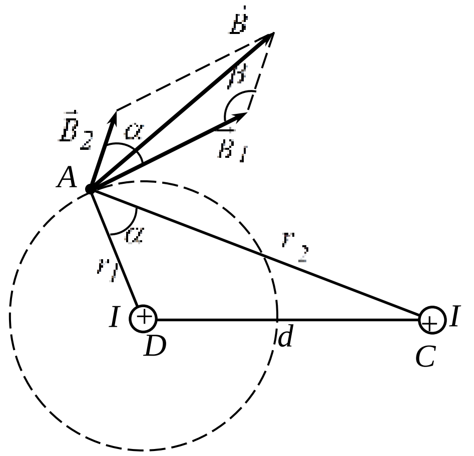

Рис. 3.26

Пример 3. Два параллельных бесконечно длинных провода *D* и *C*, по которым текут в одном направлении электрические токи силой *I* = 60 А, расположены на расстоянии *d* = 10 см друг от друга перпендикулярно плоскости чертежа. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого проводниками с током в точке *A* (см. рис. 3.26), отстоящей от оси одного проводника на расстоянии r_1 = 5 см, от другого – на r_2 = 12 см.

Решение. В данной задаче источниками магнитного поля в точке *A* являются два параллельных бесконечно длинных провода *D* и *C*. Для нахождения магнитной индукции $\vec{B}$ в этой точке воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого определим направления магнитных индукций $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ полей, создаваемых каждым проводником с током в отдельности, и сложим их геометрически:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Модуль вектора $\vec{B}$ может быть найден по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\beta} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha}, \qquad (1)$$

где $\alpha = \pi - \beta$ – угол между векторами $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$.

Магнитные индукции B_1 и B_2 выражаются, соответственно, через силу тока *I* и расстояния r_1 и r_2 от проводов до точки *A*:

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1};\; B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}.$$

Подставляя выражения B_1 и B_2 в формулу (1) и вынося $\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ за знак корня, получаем

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2}{r_1 r_2}\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Вычислим cos α. Заметив, что α = $\angle$DAC (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), по теореме косинусов запишем

$$d^2=r_1^2+r_2^2-2r_1 r_2\cos\alpha,$$

где d – расстояние между проводами. Отсюда

$$\cos\alpha=\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1 r_2};\; \cos\alpha=\frac{5^2+12^2-10^2}{2\cdot 5\cdot 12}=\frac{23}{40}.$$

Подставим в формулу (2) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$B=\frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot 60}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{1}{(0{,}05)^2}+\frac{1}{(0{,}12)^2}+\frac{2}{0{,}05\cdot 0{,}12}\frac{23}{40}}=3{,}08\cdot 10^{-4}(\text{Тл})=$$
$$=308(\text{мкТл}).$$

Ответ: B = *308* мкТл.

Пример 4. Два бесконечно длинных провода скрещены под прямым углом (см. рис. 3.27). По проводам текут токи I_1 = 80 А и I_2 = 60 А. Расстояние d между проводами равно 10 см. Определить магнитную индукцию B в точке A, одинаково удаленной от обоих проводов.

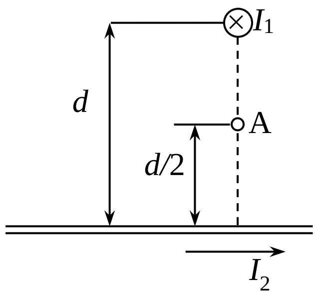

Рис. 3.27

Решение. В данной задаче магнитное поле создают два бесконечно длинных провода, которые скрещены под прямым углом. В соответствии с принципом суперпозиции магнитных полей магнитная индукция $\vec{B}$ поля, создаваемого токами I_1 и I_2, определяется выражением

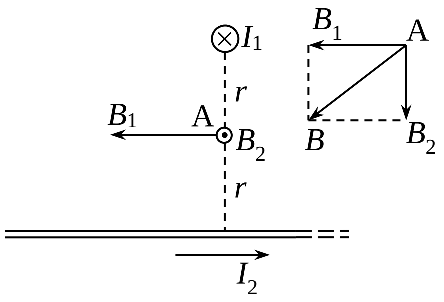

Рис. 3.28

$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, где $\vec{B}_1$ – магнитная индукция поля, созданного в точке A током I_1; $\vec{B}_2$ – магнитная индукция поля, созданного в точке A током I_2. Заметим, что векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ взаимно перпендикулярны (их направления находятся по правилу буравчика и изображены в двух проекциях на рис. 3.28). Тогда модуль вектора $\vec{B}$ можно определить по теореме Пифагора:

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2},$$

где B_1 и B_2 определяются по формулам расчёта магнитной индукции для бесконечно длинного прямолинейного провода с током: $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r_0}$ и $B_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r_0}$. В нашем случае $r_0 = d/2$, тогда $B = \dfrac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2}$.

Произведём вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{\pi \cdot 10^{-1}}\sqrt{80^2 + 60^2} = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{Тл} = 400\ \text{мкТл}.$$

Ответ: B = 400 мкТл.

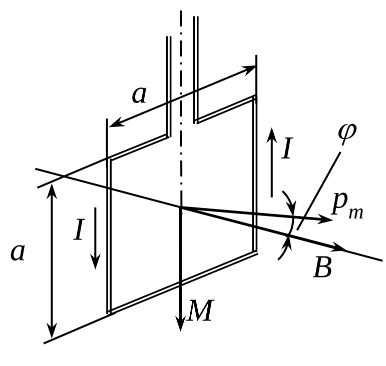

Рис. 3.29

Пример 5. Плоский квадратный контур со стороной a = 10 см, по которому течёт ток I = 100 А, свободно установился в однородном магнитном поле (B = 1 Тл). Определить работу А, совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середины его противоположных сторон, на угол: 1) $\varphi_1 = 90^\circ$; 2) $\varphi_2 = 3^\circ$.

При повороте контура сила тока в нём поддерживается неизменной.

Решение. В данной задаче внешние силы совершают работу при повороте контура с током в магнитном поле. На контур с током в магнитном поле действует момент силы:

$$M = p_m B \sin\varphi, \tag{1}$$

где $p_m = IS = Ia^2$ – магнитный момент контура; B – магнитная индукция; φ – угол между векторами $\vec{p}_m$ (направлен по нормали к контуру) и $\vec{B}$ (см. рис. 3.29).

По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле. При этом момент силы равен нулю (M = 0), а значит, $\varphi = 0$, т. е. векторы $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ сонаправлены. Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил будет стремиться возвратить контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами. Так как момент сил переменный и зависит от угла поворота φ, то для подсчёта работы применим формулу работы в дифференциальной форме $dA = Md\varphi$. Учитывая формулу (1), получаем

$$dA = IBa^2 \sin\varphi d\varphi.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдём работу при повороте на конечный угол:

$$A = IBa^2 \int_0^{\varphi} \sin\varphi d\varphi. \tag{2}$$

Работа при повороте на угол $\varphi_1 = 90^\circ$

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi d\varphi = IBa^2 \left|(-\cos\varphi)\right|_0^{\pi/2} = IBa^2. \tag{3}$$

Проверим данное выражение по размерности:

[А]=[I][B][S]=[А][Тл][м]^2=[А][Вб]=Дж

Выразим числовые значения величин в единицах СИ (I = 100 А, B = 1 Тл, a = 10 см = 0,1 м) и подставим в (3): $A_1 = 100 \cdot 1 \cdot (0{,}1)^2 = 1$ Дж.

Работа при повороте на угол $\varphi_2 = 3^\circ$. В этом случае, учитывая, что угол φ_2 мал, заменим в выражении (1) $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$A_2 = IBa^2 \int_0^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} IBa^2 \varphi_2^2. \qquad (4)$$

Выразим угол φ_2 в радианах. После подстановки числовых значений величин в (4) найдем

$A_2 = 0{,}5 \cdot 100 \cdot 1 \cdot (0{,}1)^2 \cdot (0{,}0523)^2 = 1{,}37 \cdot 10^{-3}$ Дж = 1,37 мДж.

Ответ: A_1 = 1 Дж; A_2 = 1,37м Дж.

Пример 6. Протон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U = 600 В, влетел в однородное магнитное поле с индукцией B = 0,3 Тл и начал двигаться по окружности. Вычислить радиус R окружности.

Решение. В данной задаче рассматривается движение заряженной частицы в однородном магнитном поле. Движение заряженной частицы будет происходить по окружности только в том случае, когда частица влетит в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции, т. е. $\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$ (рис. 3.30). На протон действует сила Лоренца, которая перпендикулярна вектору $\vec{\upsilon}$. Она сообщает протону нормальное ускорение $\vec{a}_n$. Согласно II закону Ньютона,

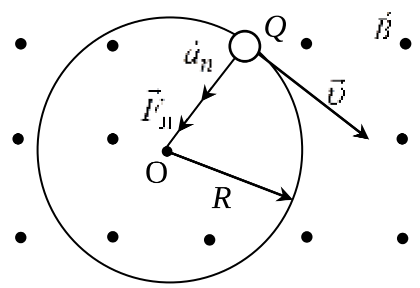

Рис. 3.30

$$\vec{F}_Л = m\vec{a}_n, \qquad (1)$$

где m – масса протона.

На рис. 3.30 совмещена траектория протона с плоскостью чертежа и дано (произвольно) направление вектора $\vec{\upsilon}$. Силу Лоренца направим перпендикулярно вектору $\vec{\upsilon}$ к центру окружности (векторы $\vec{a}_n$ и $\vec{F}_Л$ сонаправлены). Используя правило левой руки, определим направление магнитных силовых линий (направление вектора $\vec{B}$).

Перепишем выражение (1) в скалярной форме (в проекции на ось, совпадающую с радиусом):

$$F_{\text{Л}} = ma_n. \tag{2}$$

В скалярной форме $F_{\text{Л}} = Q\upsilon B\sin\alpha$. В нашем случае $\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$ и $\sin\alpha = 1$, тогда $F_{\text{Л}} = Q\upsilon B$. Так как нормальное ускорение $a_n = \upsilon^2 / R$, то выражение (2) перепишем следующим образом:

$$Q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R}.$$

Отсюда находим радиус окружности:

$$R = \frac{m\upsilon}{QB}.$$

Заметив, что $m\upsilon$ есть импульс протона (p), это выражение можно записать в виде

$$R = \frac{p}{QB}. \tag{3}$$

Импульс протона найдём, воспользовавшись связью между работой сил электрического поля и изменением кинетической энергии протона, т. е. $A = \Delta T$, или

$$Q(\varphi_1 - \varphi_2) = T_2 - T_1,$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – ускоряющая разность потенциалов (или ускоряющее напряжение U); T_1 и T_2 – начальная и конечная кинетические энергии протона.

Пренебрегая начальной кинетической энергией протона ($T_1 \approx 0$) и выразив кинетическую энергию T_2 через импульс p, получим

$$QU = \frac{p^2}{2m}.$$

Найдём из этого выражения импульс $p = \sqrt{2mQU}$ и подставим его в формулу (3) ($\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$):

$$R=\frac{\sqrt{2mQU}}{QB} \text{ или } R=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{Q}}. \qquad (4)$$

Проверим полученное выражение по размерности:

$$[R]=\frac{1}{[B]}\sqrt{\frac{[m][U]}{[Q]}}=\frac{1}{[\text{Тл}]}\sqrt{\frac{[\text{кг}][\text{В}]}{[\text{Кл}]}}=\frac{[\text{с}]^2[\text{А}]}{[\text{кг}]}\sqrt{\frac{[\text{кг}]\left[\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^{-1}\cdot\text{А}^{-1}\right]}{[\text{с}\cdot\text{А}]}}=$$

$$\frac{\text{с}^2\cdot\text{А}\cdot\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{кг}\cdot\text{с}^2\cdot\text{А}}=\text{м}$$

Подставим в формулу (4) числовые значения физических величин и произведём вычисления:

$$R=\frac{1}{0{,}3}\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 600}{1{,}6\cdot 10^{-19}}}=0{,}0118 \text{ м} = 11{,}8 \text{ мм}.$$

Ответ: R=11,8 мм.

Пример 7. Электрон движется в однородном магнитном поле (B = 10 мТл) по винтовой линии, радиус R которой равен 1 см и шаг h = 6 см. Определить период T обращения электрона и его скорость υ.

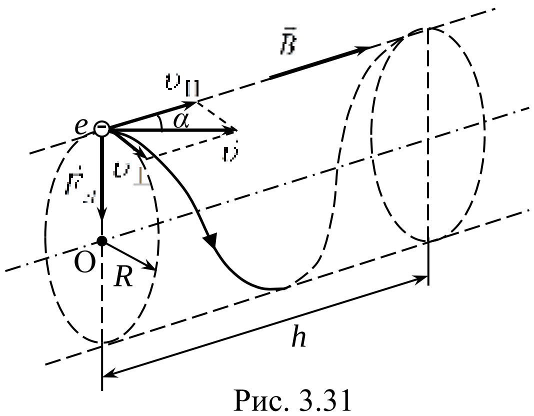

Рис. 3.31

Решение. В данной задаче рассматривается движение электрона в однородном магнитном поле. Электрон будет двигаться по винтовой линии, если он влетает в однородное магнитное поле под некоторым углом ($\alpha \neq \pi/2$) к линиям магнитной индукции. Разложим, как это показано на рис. 3.31, скорость $\vec{\upsilon}$ электрона на две составляющие: параллельную вектору $\vec{B}$ ($\vec{\upsilon}_{||}$) и перпендикулярную ему ($\vec{\upsilon}_{\perp}$). Скорость $\vec{\upsilon}_{||}$ в магнитном поле не изменяется и обеспечивает равнопеременное перемещение электрона вдоль силовой линии. Скорость $\vec{\upsilon}_{\perp}$ в результате действия силы Лоренца будет изменяться только по направлению ($\vec{F}_{Л} \perp \vec{\upsilon}_{\perp}$) (в отсутствие параллельной составляющей ($\vec{\upsilon}_{||}$= 0) движение электрона происходило бы по окружности в плоскости, перпендикулярной магнитным силовым линиям). Таким образом, электрон будет участвовать одновременно в двух движениях: равномерном перемещении со скоростью $\upsilon_{||}$ и равномерном движении по окружности со скоростью $\upsilon_{\perp}$.

Период обращения электрона связан с перпендикулярной составляющей скорости соотношением

$$T = 2\pi R/\upsilon_{\perp}. \qquad (1)$$

Найдём отношение $R/\upsilon_{\perp}$. Для этого воспользуемся тем, что сила Лоренца сообщает электрону нормальное ускорение $a_n = \dfrac{\upsilon_{\perp}^2}{R}$. Согласно II закону Ньютона, можно написать:

$$F_{Л} = ma_n \text{ или } |e|\upsilon \perp B = m\upsilon_{\perp}^2 / R. \qquad (2)$$

Сократив (2) на $\upsilon_{\perp}$, выразим соотношение $R/\upsilon_{\perp}$ ($R/\upsilon_{\perp} = m/|e|B$) и подставим его в формулу (1):

$$T = 2\pi \frac{m}{|e|B}. \qquad (3)$$

Модуль скорости υ как это видно из рис. 3.31, можно выразить через $\upsilon_{\perp}$ и $\upsilon_{||}$:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{\perp}^2 + \upsilon_{||}^2}.$$

Из формулы (2) выразим перпендикулярную составляющую скорости:

$$\upsilon_{\perp} = \frac{|e|BR}{m}.$$

Параллельную составляющую скорости $\upsilon_{||}$ найдём из следующих соображений. За время, равное периоду обращения *T*, электрон пройдёт вдоль силовой линии расстояние, равное шагу винтовой линии, т. е. $h = T\upsilon_{||}$, откуда

$$\upsilon_{||} = \frac{h}{T}.$$

Подставив вместо *T* правую часть выражения (3), получим

$$\upsilon_{||} = \frac{|e|Bh}{2\pi m}.$$

Таким образом, модуль скорости электрона

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_{\perp}^2 + \upsilon_{||}^2} = \frac{|e|B}{m}\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}\,. \qquad (4)$$

Проверим выражение (3) и (4) по размерности:

$$[T] = \frac{[m]}{[e][B]} = \frac{[\text{кг}]}{[\text{Кл}][\text{Тл}]} = \frac{[\text{кг}]}{[\text{А}\cdot\text{с}][\text{кг}/\text{А}\cdot\text{с}^2]} = c^{-1}.$$

$$\upsilon = \frac{[e][B]}{[m]}\sqrt{[R]^2 + \left(\left[\frac{h}{2\pi}\right]\right)^2} = \frac{[\text{Кл}][\text{Тл}]}{[\text{кг}]}\sqrt{[\text{м}]^2 + [\text{м}]^2} = \frac{[\text{А}\cdot\text{с}]\left[\text{кг}\cdot/\text{А}\cdot\text{с}^2\right][\text{м}]}{[\text{кг}]} = \text{м}^2/\text{с}.$$

Произведём вычисления:

$$T = \frac{2\pi\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10\cdot 10^{-3}}\,\text{с} = 3{,}57\cdot 10^{-9}\,\text{с} = 3{,}75\ \text{нс}.$$

$$\upsilon = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10\cdot 10^{-3}}{9{,}1\cdot 10^{-31}}\sqrt{(0{,}01)^2 + \left(\frac{0{,}06}{2\pi}\right)^2}\,\text{м/с} = 2{,}46\cdot 10^{7}\,\text{м/с}.$$

Ответ: $T = 3{,}75$ нс; $\upsilon = 2{,}46\cdot 10^7$ м/с.

Пример 8. Альфа-частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 10^4$ В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое (Е = 10 кВ/м) и магнитное (B = 0,1 Тл) поля со скоростью $\vec{\upsilon}$, перпендикулярной $\vec{B}$ и $\vec{E}$. Найти отношение заряда альфа-частицы к её массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

Решение. В задаче рассматривается ситуация, когда альфа-частица движется сначала в электрическом поле, а затем влетает в скрещенные под прямым углом электрическое и магнитное поля. В электрическом поле альфа-частица движется вдоль силовых линий, проходит ускоряющую разность потенциалов и приобретает скорость $\vec{\upsilon}$, т. е. работа сил электрического поля и идёт на изменение кинетической энергии частицы: $QU = m\upsilon^2/2$, откуда

$$\frac{Q}{m} = \frac{\upsilon^2}{2U}. \qquad (1)$$

В скрещенных электрическом и магнитном полях на движущуюся заряженную частицу действуют две силы:

а) сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}} = Q\left[\vec{\upsilon}\ \vec{B}\right]$, направленная перпендикулярно скорости $\vec{\upsilon}$ и вектору магнитной индукции $\vec{B}$;

б) кулоновская сила $\vec{F}_{\text{К}} = Q\vec{E}$, сонаправленная с вектором напряжённости $\vec{E}$ электростатического поля ($Q > 0$). На рис. 3.32 направим вектор магнитной индукции $\vec{B}$ вдоль оси OZ, скорость $\vec{\upsilon}$ – в положительном направлении оси OX, тогда $\vec{F}_{\text{Л}}$ и $\vec{F}_{\text{К}}$ будут направлены так, как показано на рисунке.

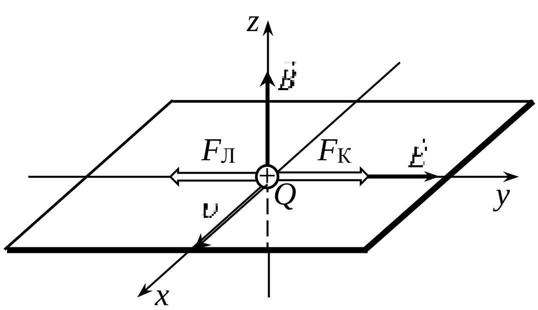

Рис. 3.32

Альфа-частица не будет испытывать отклонения, если геометрическая сумма сил будет равна нулю: $\vec{F}_{\text{Л}} + \vec{F}_{\text{К}} = 0$. В проекции на ось OY получим следующее равенство (при этом учтено, что $\vec{\upsilon} \perp \vec{B}$ и $\sin\alpha = 1$):

$$QE - Q\upsilon B = 0,$$

откуда

$$\upsilon = E/B.$$

Подставив это выражение скорости в формулу (1), получим

$$\frac{Q}{m}=\frac{E^2}{2UB^2}.$$

Проверим размерность:

$$\frac{[Q]}{[m]}=\frac{[E]^2}{[U][B]^2}=\frac{\left[\text{В}/\text{м}^2\right]}{[\text{В}]\left[\text{кг}/\text{с}^2\cdot\text{А}\right]^2}=\frac{\text{В}\cdot\text{с}^4\text{А}^2}{\text{м}^2\text{кг}^2}=\frac{\text{м}^2\cdot\text{кг}\cdot\text{с}^3\cdot\text{А}\cdot\text{Кл}}{\text{с}^3\cdot\text{А}\cdot\text{м}^2\cdot\text{кг}^2}=\frac{\text{Кл}}{\text{кг}}.$$

Произведём вычисления:

$$\frac{Q}{m}=\frac{(10^4)^2}{2\cdot 104(0{,}1)^2}\,\text{Кл/кг}=4{,}81\cdot 10^7\,\text{Кл/кг}=48{,}1\ \text{МКл/кг}\ .$$

Ответ: $\frac{Q}{m}=48{,}1$ МКл/кг.

Пример 9. Короткая катушка, содержащая N = 10^3 витков, равномерно вращается с частотой n = 10 с$^{-1}$ относительно оси АС, лежащей в плоскости катушки и перпендикулярной линиям однородного магнитного поля (B = 0,04 Тл). Определить мгновенное значение ЭДС индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол β= 60° с линиями поля. Площадь S катушки равна 100 см^2 (см. рис. 3.33).

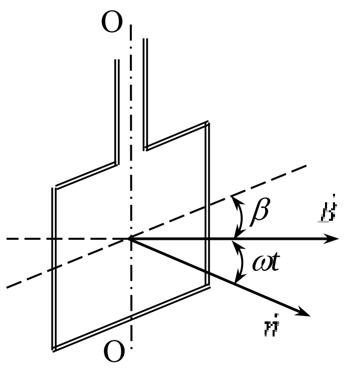

Рис. 3.33

Решение. В данной задаче рассматривается катушка, вращающееся в однородном магнитном поле, в результате в ней возникает ЭДС индукции, мгновенное значение ε_i которой определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла:

$$\varepsilon_i=-N\frac{d\Phi}{dt}, \tag{1}$$

где N – число витков катушки, пронизываемых магнитным потоком Φ.

В однородном магнитном поле по определению Φ = $BS\cos\alpha$, где B – магнитная индукция; S – площадь катушки; α − угол между векто ром $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$. При равномерном вращении катушки $\alpha = \omega t$, где ω − угловая скорость вращения катушки. Тогда магнитный поток Φ, пронизывающий катушку в момент времени t, изменяется по закону: $\Phi = BS\cos\omega t$. Подставив в формулу (1) выражение магнитного потока Φ и продифференцировав по времени, найдём мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = NBS\omega\sin\omega t.$$

Заметив, что угловая скорость ω связана с частотой вращения n катушки соотношением $\omega = 2\pi n$ и что угол $\omega t = \pi/2 - \beta$ (рис. 3.33), получим (учтено, что $\sin(\pi/2 - \beta) = \cos\beta$)

$$\varepsilon_i = 2\pi nNBS\cos\beta.$$

Проверим выражение по размерности:

$$[\varepsilon_i] = [\mathrm{n}][\mathrm{B}][\mathrm{S}] = [\text{с}^{-1}][\text{кг/А с}^2\ \text{м}^2] = \text{кг м}^2/\text{А с}^3 = \text{В}.$$

Произведём вычисления:

$$\varepsilon_i = 2\cdot3{,}14\cdot10\cdot10^3\cdot0{,}04\cdot10^{-2}\cdot0{,}5\text{В} = 25{,}1\ \text{В}.$$

Ответ: $\varepsilon_i = 25{,}1$ В.

Пример 10. Квадратная проволочная рамка со стороной $a = 5$ см и сопротивлением $R = 10$ мОм находится в однородном магнитном поле ($B = 40$ мТл). Нормаль к плоскости рамки составляет угол $\alpha = 30°$ с линиями магнитной индукции. Определить заряд Q, который пройдёт по рамке, если магнитное поле выключить.

Решение. В данной задаче рассматривается индукционный ток, который возникает в рамке, находящийся в изменяющимся во времени магнитном поле. При выключении магнитного поля произойдет изменение магнитного потока. Вследствие этого в рамке возникнет ЭДС индукции, определяемая основным законом электромагнитной индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Возникшая ЭДС индукции вызовет в рамке индукционный ток, мгновенное значение которого можно определить воспользовавшись законом Ома для полной цепи: $I_i = \frac{\varepsilon_i}{R}$, где R – сопротивление рамки. Тогда $I_i R = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Так как мгновенное значение силы индукционного тока $I_i = \frac{dQ}{dt}$, то это выражение можно переписать в виде

$$\frac{dQ}{dt} R = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ откуда } dQ = -\frac{d\Phi}{R}. \qquad (1)$$

Проинтегрировав выражение (1), найдём

$$\int_0^Q dQ = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi, \text{ или } Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Заметив, что при выключенном поле (конечное состояние) $\Phi_2 = 0$, последнее равенство перепишется в виде

$$Q = \frac{\Phi_1}{R}. \qquad (2)$$

Найдём магнитный поток Φ_1. По определению магнитного потока для однородного поля имеем $\Phi_1 = BS\cos\alpha$, где S – площадь рамки.

В нашем случае (рамка квадратная) $S = a^2$. Тогда

$$\Phi_1 = Ba^2\cos\alpha. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим $Q = \frac{Ba^2}{R}\cos\alpha$.

Проверим выражение по размерности:

$$Q = \frac{[B][a]^2}{[R]} = \frac{[\text{кг/с}\cdot\text{А}][\text{м}]^2}{[\text{м}^2\cdot\text{кг/А}^2\cdot\text{с}^3]} = \text{А}\cdot\text{с} = \text{Кл}.$$

Произведём вычисления:

$$Q = \frac{0{,}04\cdot 0{,}25\cdot 10^{-4}}{0{,}01}\cos 30^\circ = 8{,}67\cdot 10^{-3}\,\text{Кл} = 8{,}67\,\text{мКл}.$$

Ответ: Q = 8,67 мКл.

Контрольные вопросы

Электрическое и магнитное поля создаются неподвижными зарядами или движущимися зарядами (токами), с другой стороны, поля обнаруживаются по действию на помещенные в них заряды или токи. В связи с этим возникают две основные задачные ситуации:

– расчёт характеристик поля по известным зарядам (токам), *создающим поле;*

– расчёт действий поля (расчёт силы, работы и др.) на заряды или токи, *помещенные в это поле*.

Используя ту или иную формулу при решении задачи, необходимо разобраться о каких именно зарядах (токах) идёт речь.

1. Предположим, в точках А и В находятся точечные заряды q_1 и q_2, соответственно. Расстояние между зарядами r, сила, действующая на один из зарядов, со стороны поля, созданного другим зарядом, равна F (причём на основании III закона Ньютона силы F_{12} и F_{21} равны по модулю).

Из приведённых ниже формул выберите те, с помощью которых можно определить:

а) напряжённость поля в точке А (E_A)*;*

б) напряжённость поля в точке В (E_B)*;*

в) силу, действующую на заряд q_1*, находящийся в точке А;*

г) силу, действующую на заряд q_2*, находящийся в точке В.*

$E = F/q_1$; $E = F/q_2$; $E = (kq_1)/r^2$; $E = (kq_2)/r^2$; $F = q_1E_A$; $F = q_1E_B$; $F = q_2E_A$; $F = q_2E_B$; $F = (kq_1q_2)/r^2$.

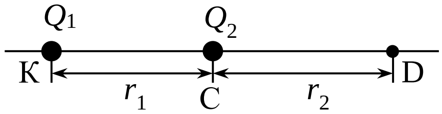

Рис. 3.34

2. В точке К находится заряд Q_1, в точке С находится заряд Q_2, заряд Q_2 перемещается из точки С в точку Д. Расстояние КС = r_1, СД = r_2.

Существуют формулы для вычисления работы при перемещении заряда в поле и для вычисления потенциала поля, созданного точечным зарядом:

$$A = -Q\ (\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (1);$$

$$\varphi = (kQ)\ /r. \qquad (2)$$

О каком из зарядов идёт речь в формуле (1)?

Если по формуле (2) необходимо вычислить φ_1, то что следует понимать под Q и под r?

Если по формуле (2) необходимо вычислить φ_2, то что следует понимать под Q и под r?

3. Предположим, есть два параллельных, длинных проводника, по которым текут токи I_1 и I_2. Необходимо вычислить индукцию магнитного поля (B) в том месте, где расположен небольшой участок второго проводника длиной l, и силу Ампера (F_A), действующую на этот участок. Это можно сделать, используя формулы:

$$B = (\mu_0 I)/(2\pi r) \qquad (1);$$

$$F_A = BIl\ sin\alpha \qquad (2)$$

О каком токе идёт речь в формуле (1)?

О каком токе идёт речь в формуле (2)?

Сделайте рисунок, отражающий описанную ситуацию, укажите произвольно направления токов в проводниках. Определите по рисунку направления векторов B и F_A.

Что такое угол α в формуле (2)? Укажите этот угол на рисунке и определите его числовое значение для данной ситуации.

4. Некоторый известный по условию задачи заряд создаёт электрическое поле. В точке A, находящейся на расстоянии r_0 от заряда, напряжённость поля равна E_0.

От чего зависит направление вектора E_0 и его модуль?

Запишите формулы, по которым можно рассчитать модуль E_0, если заряд, создающий поле:

– *точечный;*

– *равномерно распределён по бесконечной нити;*

– *равномерно распределён по бесконечной плоскости.*

Используя записанные формулы, изобразите для сравнения на одном рисунке примерные графики изменения напряжённости при увеличении расстояния r (отсчитываемого вдоль силовой линии) для указанных ситуаций.

5. *Как рассчитать напряжённость и потенциал результирующего электрического поля, если оно создано системой нескольких зарядов?*

6. Два одноимённых точечных заряда ($q_1 > q_2$) находятся на расстоянии r друг от друга.

Укажите примерное положение точки (на прямой, проходящей через заряды), в которой:

– *напряжённость результирующего поля окажется равной нулю:*

– *потенциал результирующего поля окажется равным нулю.*

Выполните задание при условии, что заряды разноимённые. Все ответы обоснуйте, используя принцип суперпозиции для электрических полей.

7. При перемещении заряда в электрическом поле совершается работа, которая может быть рассчитана двумя способами: через напряжённость поля и через разность потенциалов.

Запишите обе формулы для расчёта работы в следующих ситуациях:

а) поле не однородное, заряд перемещается на расстояние d по прямой, не совпадающей с силовой линией;

б) поле не однородное, заряд перемещается на расстояние d вдоль силовой линии;

в) поле не однородное, заряд перемещается по эквипотенциальной поверхности;

г) поле однородное, заряд перемещается на расстояние d по прямой, не совпадающей с силовой линией;

д) поле однородное, заряд перемещается на расстояние d вдоль силовой линии.

8. Основные характеристики поля связаны между собой.

Запишите формулы связи между напряжённостью и разностью потенциалов в общем случае и для однородного поля.

9. Существуют дополнительные характеристики электрического поля, вводимые на основе понятий «напряжённость» и «потенциал».

Перечислите эти характеристики и укажите, какие из них векторные, а какие скалярные?

Как определяется направление для векторных характеристик?

10. *В чем проявляется потенциальный характер электростатического поля?*

Сформулируйте словами и запишите аналитически теорему о циркуляции вектора Е, являющуюся математическим выражением свойства потенциальности электростатического поля.

11. *Сформулируйте словами и запишите аналитически теорему о потоке вектора Е, выражающую тот факт, что силовые линии электростатического поля не замкнутые.*

12. *Каким образом может быть создано магнитное поле?*

Сформулируйте определение понятия «индукция магнитного поля».

От чего зависит численное значение индукции? Приведите примеры формул, связывающих индукцию поля с силой тока, создающего это поле, при разных конфигурациях проводников, по которым течет ток.

Проиллюстрируйте на рисунке правило для определения направления вектора индукции при известном направлении тока в проводнике.

13. Сформулируйте принцип суперпозиции для магнитных полей.

Магнитное поле создаётся прямым током I_1 и круговым током I_2, которые расположены так, как показано на рис. 3.35.

Изменится ли направление и числовое значение индукции результирующего поля в центре кругового тока, если направление этого тока изменить на противоположное?

Ответьте на поставленный вопрос, если расположение прямого и кругового токов соответствует рис. 3.36.

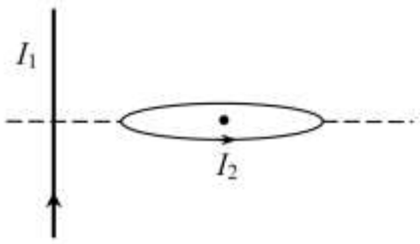

Рис. 3.35

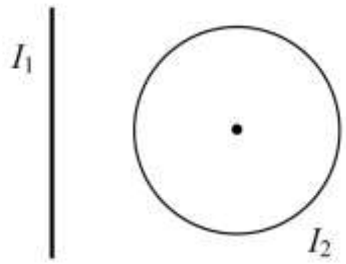

Рис. 3.36

14. Что определяет закон Био – Савара – Лапласа?

Как записывается принцип суперпозиции для магнитного поля в ситуации, когда необходимо определить индукцию поля, созданного током, текущим по проводнику, который можно рассматривать как систему бесконечно малых элементов тока ($I \cdot dl$)?

15. *Сформулируйте словами и запишите аналитически теорему о потоке вектора В, выражающую тот факт, что силовые линии магнитного поля всегда замкнутые.*

16. Магнитное поле в отличие от электростатического не является потенциальным.

Сформулируйте словами и запишите аналитически теорему о циркуляции вектора В, являющуюся математическим выражением данного свойства.

17. *В чём сущность явления электромагнитной индукции? При каком условии может возникнуть данное явление?*

Сформулируйте основной закон для явления электромагнитной индукции (закон Фарадея) и правило Ленца.

Запишите определение понятия «магнитный поток». Опираясь на это определение и закон Фарадея, назовите три способа возбуждения ЭДС индукции в проводнике, помещенном в магнитное поле.

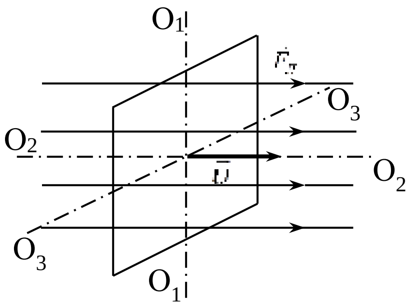

Рис. 3.37

18. Проволочная рамка помещена в однородное магнитное поле (см. рис. 3.37).

В каких из перечисленных ниже ситуаций в рамке не будет возникать индукционный ток:

а) рамка вращается вокруг оси O_1O_1;

б) рамка вращается вокруг оси O_2O_2;

в) рамка вращается вокруг оси O_3O_3;

г) рамка движется поступательно со скоростью v.

19. На какие группы делятся вещества по своим электрическим свойствам? В вакууме создано поле с напряжённостью E_0. В это поле помещен образец из некоторого вещества.

Что вы можете сказать о напряжённости поля внутри образца, если образец диэлектрический? если образец металлический?

Что показывает диэлектрическая проницаемость вещества? Какие значения она может принимать?

20. На какие группы делятся вещества по своим магнитным свойствам?

Что показывает магнитная проницаемость вещества? Какие значения она принимает для разных групп магнетиков?

21. При описании свойств металлических проводников используют следующие характеристики:

– электроёмкость,

– индуктивность (коэффициент самоиндукции),

– электрическое сопротивление.

Перечислите факторы, которые влияют на каждую из этих величин.

22. Что такое «однородный участок электрической цепи»? «неоднородный участок электрической цепи»?

Сформулируйте закон Ома для неоднородного участка цепи и его частные случаи – для однородного участка и для полной цепи.

23. Если цепь содержит несколько проводников, их можно соединять разными способами.

Сформулируйте правила для нахождения основных параметров цепи (I, U, R) при последовательном и при параллельном соединении проводников.

По каким правилам можно производить расчёт разветвленных цепей, не сводящихся к последовательному и параллельному соединениям?

24. *Как определяются полная, полезная мощность, потери мощности и КПД источника тока?*

Рекомендуемая литература

1. Бутиков Е. И., Кондратьев А. С. Физика для углубленного изучения. Т. 2: Электродинамика Оптика. Москва: Физматлит, 2004. 336 с.

2. Грабовский Р. И. Курс физики: учебник. 12-е изд. стер. Санкт-Петербург: Лань, 2012. 608 с.

3. Кирик Л. А., Генденштейн Л. Э., Гельфгат И. М. Задачи по физике для профильной школы с примерами решений / под ред. В. А. Орлова. Москва: ИЛЕКСА, 2012. 416 с.

4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2: Электричество и магнитизм, Волны, Оптика: учеб. пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2008. 496 с.

5. Свешников И. В., Кузьмина Т. В Электромагнитное поле: учеб. пособие. Чита: ЗабГУ, 2012. 200 с.

6. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие. Москва: Высшая школа, 2007. 560 с.

7. Фриш С. Э., Тиморева А. В. Курс общей физики. Т. 2: Электрические и электромагнитные явления: учебник. Санкт-Петербург: Лань, 2009. 528 с.

8. Яворский Б. А., Детлоф А. А., Лебедев А. К. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. 8-е изд. Москва: Оникс, 2006. 1056 с.

Глава 4. Основы молекулярной физики и термодинамики

Предметом изучения молекулярной физики и термодинамики являются особенности поведения микрочастиц вещества – молекул, их связь с термодинамическими параметрами, характеризующими макросостояние вещества (давление, объём, температура), а также явления, связанные с изменением термодинамических параметров.

4.1. Общие понятия

Основные положения молекулярно-кинетической теории:

– существует предел делимости вещества. Мельчайшей частицей вещества, сохраняющей его свойства, является *молекула;*

– все молекулы данного вещества одинаковы;

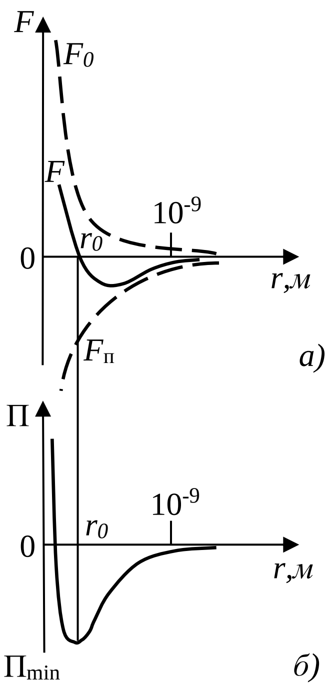

Рис. 4.1

– между молекулами действуют *силы притяжения и отталкивания*, обусловленные наличием заряженных частиц внутри молекул. При изменении расстояния между молекулами силы отталкивания изменяются быстрее, чем силы притяжения. Это приводит к существованию состояний устойчивого равновесия (в котором эти силы уравновешивают друг друга, а потенциальная энергия взаимодействия молекул принимает минимальное значение (см. рис. 4.1);

– молекулы находятся в непрерывном *хаотическом движении* (в газах движение молекул поступательное и вращательное, в жидкостях и твёрдых телах – преимущественно, колебательное относительно положения равновесия, с перескоками из одного положения в другое);

– в процессе движения молекулы сталкиваются друг с другом. При этом модуль и направление скорости каждой молекулы меняется случайным образом, однако, в большой совокупности молекул устанавливается строго определённое распределение молекул по скоростям (распределение Максвелла – см. далее по тексту).

Простейшая термодинамическая модель вещества – идеальный газ – совокупность частиц (молекул), размерами и взаимодействием которых можно пренебречь, а столкновения между ними считать упругими.

4.2. Статистический и термодинамический методы изучения термодинамических явлений

При изучении явлений, связанных с изменением термодинамических параметров вещества, сложились два метода: статистический и термодинамический. Термодинамический метод – феноменологический, он устанавливает связи между термодинамическими параметрами на основе прямых экспериментов или путём обобщения экспериментальных фактов. Статистический метод рассматривает макроскопические процессы как результат действия огромного числа молекул (в одном кубическом сантиметре газа при нормальных условиях содержится порядка 10^{20} молекул!). При этом свойства системы отличаются от свойств отдельных молекул. Так, например, направление и числовое значение скорости отдельной молекулы меняется случайным образом в результате столкновений с другими молекулами, но среднее значение скорости для всей совокупности молекул однозначно и закономерно связано с температурой вещества. Статистический метод позволяет анализировать изменения, происходящие в поведении молекул вещества при изменении внешних условий, устанавливать статистические законы (распределение молекул по скоростям, по координатам, по энергиям, по импульсам и т. п.), рассчитывать средние значения параметров молекул, связывать их с наблюдаемыми свойствами вещества и на этой основе предсказывать закономерности разнообразных термодинамических явлений. Особенностью статистических законов является то, что они носят вероятностный характер и выполняются тем точнее, чем больше элементов содержит система (в случае молекулярной физики – чем больше молекул в составе вещества).

В данном разделе будут рассмотрены два статистических закона (закон распределения молекул по скоростям – распределение Максвелла и закон распределения молекул по высоте в поле силы тяжести Земли – частный случай распределения Больцмана), а также два термодинамических закона (уравнение состояния идеального газа и первое начало термодинамики).

4.2.1. Понятийный аппарат (микропараметры молекул и их связь с макропараметрами термодинамического состояния вещества)

Масса молекулы (m_0) – определяется как сумма масс атомов, входящих в состав молекулы. Массы атомов, выраженные в относительных единицах (в атомных единицах массы – а.е.м.), даны в таблице Менделеева. При этом за 1 а.е.м. принимается 1/12 часть массы атома углерода.

1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

П р и м е р: Определим массу молекулы воды. Состав молекулы – H_2O – два атома водорода и один атом кислорода. По таблице Менделеева, масса атома водорода равна 1 а.е.м., а масса атома кислорода – 16 а.е.м.

Тогда масса молекулы воды m_0 (H_2O) = $2 \cdot 1$ а.е.м. + 16 а.е.м. = = 18 а.е.м. = $18 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \approx 30 \cdot 10^{-27}$ кг.

Эффективный диаметр молекулы (**$d_{эф}$**) – наименьшее расстояние, на которое могут сблизиться центры молекул. Поскольку сближению молекул препятствуют силы отталкивания, $d_{эф}$ зависит от скорости движения молекул, но часто при решении задач этой зависимостью пренебрегают и считают $d_{эф}$ табличной величиной.

Длина свободного пробега молекул (λ) – среднее расстояние, проходимое молекулой от одного столкновения до другого:

$$\lambda = \frac{\langle \upsilon \rangle}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n_0 d_{эф}^2}, \tag{4.1}$$

где $\langle \upsilon \rangle$ – средняя скорость теплового движения молекул; z – среднее число столкновений каждой молекулы с другими в единицу времени; n_0 – число молекул в единице объёма (концентрация молекул).

Число степеней свободы молекулы (i) – число независимых переменных, однозначно определяющих положение молекулы в пространстве:

– для одноатомной молекулы, которую можно принять за материальную точку, $i_{пост.} = 3$, что соответствует возможности поступательного движения такой молекулы относительно трёх координатных осей;

– для двухатомной молекулы с жёсткой связью между атомами внутри молекулы $i = i_{пост.} + i_{вр.} = 5$, что соответствует возможности поступательного движения такой молекулы относительно трёх координатных осей и вращательного движения относительно двух осей, перпендикулярных прямой, соединяющей атомы внутри молекулы (вращение вокруг этой прямой не связано с изменением положения молекулы в пространстве);

– для двухатомной молекулы с упругой связью между атомами добавляется ещё одна степень свободы, поскольку возникает возможность изменения расстояния между атомами внутри молекулы в процессе их колебательного движения $i = i_{пост.} + i_{вр.} + i_{кол.} = 6$;

– для многоатомных молекул с жёсткой связью $i = i_{пост.} + i_{вр.} = 6$, так как в этом случае возможно поступательное движение относительно трёх осей и вращение вокруг трёх осей.

Энергия молекул складывается из кинетической энергии (энергии движения) и потенциальной энергии (энергии взаимодействия). Соотношение между средними значениями этих энергий определят агрегатное состояние вещества:

– при $E_к >> E_р$ – газообразное состояние;

– при $E_к \approx E_р$ – жидкое состояние;

– при $E_к << E_р$ – твёрдое состояние.

***Средняя кинетическая энергия одной молекулы*:**

$$\langle E_i \rangle = \frac{m\langle \upsilon^2 \rangle}{2},$$

где $\sqrt{\langle \upsilon^2 \rangle} = \upsilon_{\text{ср.кв.}}$ – ***среднеквадратичная скорость*** *молекул* (равна корню квадратному из среднего значения квадратов скоростей всех молекул).

Внутренняя энергия вещества (*U)* – это суммарная кинетическая энергия теплового *хаотического* движения всех молекул и суммарная потенциальная энергия их взаимодействия *между собой*. При этом, если тело как целое участвует в механическом движении и во взаимодействии с другими телами, то кинетическая и потенциальная энергии, связанные с этими процессами, никак не влияют на внутреннюю энергию тела.

Количество вещества (*ν)* – определяется количеством структурных элементов (атомов, молекул, ионов), из которых состоит вещество. Количество вещества принято измерять в молях. 1 моль – это такое количество вещества, в котором содержится $6{,}02 \cdot 10^{23}$ молекул.

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ (1/моль) = $6{,}02 \cdot 10^{26}$ (1/кмоль) – *число Авогадро.*

Молярная масса вещества (М) – масса одного моля (или одного киломоля) вещества:

$$M = m_0 \cdot N_A, \tag{4.2}$$

где m_0 – масса одной молекулы*;* N_A – число молекул в одном моле (киломоле).

Легко показать, что *молярная масса, выраженная в кг/кмоль совпадает с массой молекулы, выраженной в а.е.м.*

Например, молярная масса воды:

М(H_2O)=18(а.е.м.$\cdot$1,66$\cdot 10^{-27}$ (кг/а.е.м.)$\cdot$6,02$\cdot 10^{26}$ (1/кмоль) = 18 (кг/кмоль).

Связь количества вещества с массой вещества:

$$\nu = \frac{m}{M}. \qquad (4.3)$$

Связь плотности вещества с концентрацией и массой молекул:

$$\rho = n_0 m_0. \qquad (4.4)$$

Связь средней кинетической энергии одной молекулы с температурой:

$$\langle E_i \rangle = \frac{i}{2} kT, \qquad (4.5)$$

где i – число степеней свободы молекулы; k = 1,38$\cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; $T = t^o$ +273 – абсолютная температура по шкале Кельвина; t^o – температура вещества по шкале Цельсия.

Связь давления газа с импульсами молекул, со средней кинетической энергией поступательного движения молекул, со скоростью и концентрацией молекул

Давление газа определяется суммарным импульсом, который передаётся молекулами стенкам сосуда в единицу времени на единицу площади (при этом считается, что соударения молекул со стенками сосуда происходят абсолютно упруго). Поскольку импульс связан со скоростью и кинетической энергией движения молекул, можно записать несколько вариантов связи давления с характеристиками молекул:

$$p = \frac{\sum |m_i \upsilon_i|}{S \cdot t};\ p = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot n_0 \langle E_i \rangle;\ p = \frac{1}{3} \cdot n_0 m \langle \upsilon^2 \rangle;\ p = n_0 kT, \qquad (4.6)$$

где n_0 – число молекул в единице объёма.

Для идеального газа внутренняя энергия сводится к суммарной кинетической энергии его молекул (потенциальной энергией взаимодействия молекул пренебрегают), поэтому с учётом (4.5) получаем:

$$U = \frac{i}{2} kT \cdot N = \frac{i}{2} kT \cdot N_A \cdot \nu,$$

где N – общее число молекул; N_A – число Авогадро (число молекул в одном моле вещества); $\nu = \frac{m}{M}$ – количество молей вещества; $k \cdot N_A = R =$ $= 8{,}31$ Дж/ мольК = $8{,}31 \cdot 10^3$ Дж/ кмольК – *универсальная газовая постоянная.*

Окончательно:

$$U = \frac{i}{2} R \frac{m}{M} T. \tag{4.7}$$

Внутренняя энергия идеального газа однозначно определяется его абсолютной температурой.

4.2.2. Статистические законы

Закон распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла):

$$f(\upsilon) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \upsilon^2 \cdot e^{-m_0 \upsilon^2 / (2kT)}, \tag{4.8}$$

где $f(\upsilon) = \frac{dN}{N d\upsilon}$ – ***функция распределения***, показывающая, какая часть из общего числа молекул обладает скоростями в интервале единичной ширины вблизи заданного значения скорости;

N – общее число молекул в рассматриваемом объёме вещества;

dN – число молекул, скорости которых лежат в интервале шириной $d\upsilon$.

Графическая интерпретация закона (4.8) приведена на рис. 4.2. Анализ рис. 4.2 и уравнения (4.8) приводит к следующим выводам.

1. При любой температуре существуют как быстро, так и медленно движущиеся молекулы.

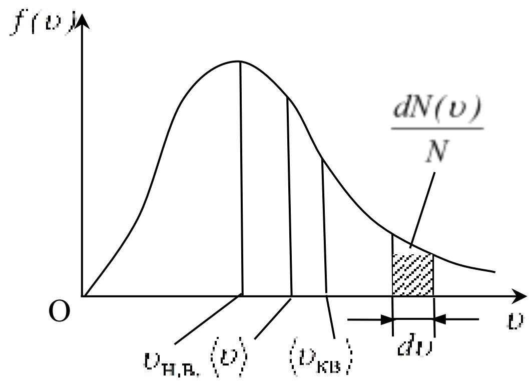

Рис. 4.2

2. Среди всех возможных скоростей движения можно выделить одну $\upsilon_{\text{н.в.}}$ – наиболее вероятную скорость, т. е. скорость, соответствующую максимуму функции распределения.

3. Исследуя на экстремум функцию распределения (4.8), нетрудно установить *связь наиболее вероятной скорости с температурой вещества и массой молекул*:

$$\upsilon_{\text{н.в.}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \qquad (4.9)$$

4. Из определения функции распределения следует: $\frac{dN}{N} = f(\upsilon)d\upsilon,$

тогда *доля молекул, имеющих скорости в интервале от υ_1 до υ_2*, может быть найдена как интеграл:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} f(\upsilon)d\upsilon, \qquad (4.10)$$

что графически изображается площадью, заштрихованной на рис. 4.2.

5. При малых интервалах скоростей $(\Delta\upsilon << \upsilon)$:

$$\frac{\Delta N}{N} \approx f(\upsilon)\Delta\upsilon. \qquad (4.11)$$

6. Кривая $f(\upsilon)$ не симметрична – доля молекул, имеющих скорости от 0 до $\upsilon_{\text{н.в.}}$ меньше, чем доля молекул, имеющих скорости от $\upsilon_{\text{н.в.}}$ до ∞. Из этого следует, что *средняя арифметическая скорость движения молекул* больше, чем наиболее вероятная:

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (4.12)$$

7. Расчёты показывают, что среднеквадратичная скорость молекул (которая используется при вычислении средней кинетической энергии) больше среднеарифметической:

$$\upsilon_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\pi M}}. \tag{4.13}$$

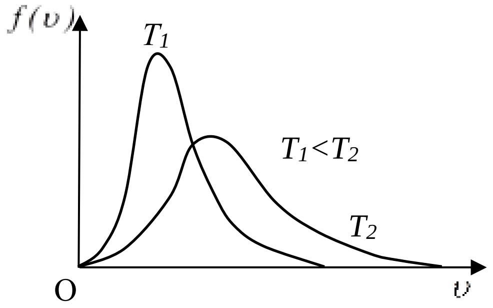

Рис. 4.3

8. При изменении температуры вид кривой распределения Максвелла меняется так, как показано на рис. 4.3. Отсюда следует, что *понятие «температура» имеет статистический смысл*, его нельзя относить к одной молекуле. Температура не определяет движение отдельно взятой молекулы, а меняет соотношение между медленно и быстро движущимися молекулами, в частности, при повышении температуры увеличивается доля молекул, движущихся с большими скоростями и уменьшается доля молекул, имеющих малые скорости.

Закон распределения молекул идеального газа по координатам в поле силы тяжести Земли (распределение Больцмана):

$$f(h) = C \cdot e^{-mgh/kT}, \tag{4.14}$$

где $f(h) = \dfrac{dN}{Ndh}$ – функция распределения, показывающая какая часть из общего числа молекул в рассматриваемом объёме находится на высоте h над поверхностью Земли в слое единичной толщины.

Это уравнение можно преобразовать к виду:

$$n_h = n_0 \cdot e^{-mgh/kT}, \tag{4.15}$$

где n_0 – концентрация молекул газа на поверхности Земли; n_h – концентрация молекул газа на высоте h над поверхностью Земли; mgh – потенциальная энергия одной молекулы в поле силы тяжести Земли; T – абсолютная температура газа; k – постоянная Больцмана.

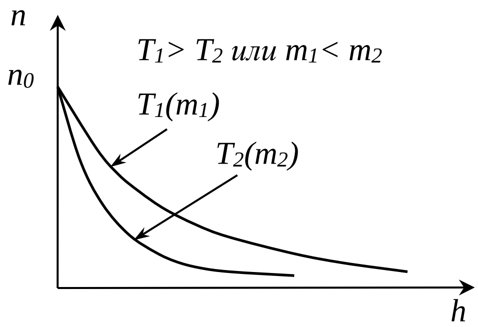

Рис. 4.4

Графическая интерпретация закона (4.15) приведена на рис. 4.4.

Анализ рис. 4.4 и уравнения (4.15) приводит к следующим выводам:

1. Скорость убывания концентрации молекул с высотой тем больше, чем ниже температура газа (на рис. 4.4 $T_2 < T_1$).

2. Скорость убывания концентрации молекул с высотой тем больше, чем больше масса молекул газа (на рис. 4.4 $m_2 > m_1$).

3. Следствием предыдущего вывода является изменение состава атмосферы с высотой – при увеличении высоты из состава воздуха в первую очередь выбывают тяжёлые газы и взвеси (дымы), а на высотах в несколько километров наступает кислородное голодание.

4. Учитывая связь концентрации молекул с давлением газа $p = n \cdot k \cdot T,$ получаем закон изменения давления газа с высотой при условии постоянства температуры по всей высоте столба газа – *барометрическую формулу:*

$$p_h = p_0 \cdot e^{-mgh/kT}. \qquad (4.16)$$

4.2.3. Термодинамические законы

***Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона)*:** произведение давления на объём газа в любом состоянии равно произведению количества вещества на абсолютную температуру и на универсальную газовую постоянную:

$$PV = \frac{m}{M} RT. \qquad (4.17)$$

Таблица 4.1

Следствия из уравнения (4.17) в применении к простейшим термодинамическим процессам

Процесс	*Условия протекания процесса*	*Уравнение процесса*	*Формулировка закона*
Изохорический	V = const; m/M = const	$(P_1/P_2) = (T_1/T_2)$	Давление газа прямо пропорционально абсолютной температуре
Изобарический	P = const; m/M = const	$(V_1/V_2) = (T_1/T_2)$	Объём газа прямо пропорционален абсолютной температуре
Изотермический	T = const; m/M = const	$(P_1/P_2) = (V_2/V_1)$	Давление газа обратно пропорционально объёму
Адиабатический	Процесс происходит без теплообмена с окружающей средой	$(P_1/P_2)=(V_2/V_1)^{\gamma}$	Давление обратно пропорционально объёму в степени γ

В уравнении адиабатического процесса (уравнении Пуассона) показатель адиабаты (или коэффициент Пуассона) $\gamma = c_p^*/c_v^*$ – отношение молярной теплоёмкости газа при постоянном давлении к молярной теплоёмкости при постоянном объёме. Используя уравнение состояния идеального газа, уравнение Пуассона можно преобразовать к параметрам $P \leftrightarrow T$ либо $V \leftrightarrow T$ (студентам предлагается проделать это самостоятельно).

Первое начало термодинамики: количество теплоты, подводимое к системе, расходуется на изменение внутренней энергии и на совершение работы против внешних сил.

– в интегральной форме:

$$Q = \Delta U + A \qquad (4.18)$$

– в дифференциальной форме: $\partial Q = dU + \partial A$.

В последнем уравнении dU – бесконечно малое *изменение* внутренней энергии, с математической точки зрения – полный дифференциал, это означает, что *изменение внутренней энергии не зависит от способа перехода системы из одного состояния в другое,* а определяется только параметрами начального и конечного состояний (для идеального газа – только его температурой). ∂Q и ∂A – бесконечно малые *количества* теплоты и работы, соответственно, с математической точки зрения эти величины не являются полными дифференциалами, потому что *и работа, и количество теплоты зависят от условий перехода системы из одного состояния в другое* (например, происходит процесс перехода при постоянном давлении или при постоянной температуре).

При решении задач на применение первого начала термодинамики необходимо учитывать правила знаков:

$Q > 0$ – система получает тепло, $Q < 0$ – система отдаёт тепло*;*

$A > 0$ – система совершает работу против внешних сил (газ расширяется), $A < 0$ – работа совершается внешними силами (газ сжимается);

$\Delta U > 0$ – внутренняя энергия системы увеличивается (идеальный газ нагревается), $\Delta U < 0$ – внутренняя энергия уменьшается (идеальный газ охлаждается).

Расчёт работы при изменении объёма газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV \tag{4.19}$$

Результат интегрирования (4.19) для некоторых частных случаев:

– работа в изобарическом процессе – $A = p(V_2 - V_1)$;

– работа в изотермическом процессе – $A = \frac{m}{M} RT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$;

– работа в адиабатическом процессе – $A = -\frac{i}{2} R \cdot \frac{m}{M}(T_2 - T_1)$.

Расчёт количества теплоты при изменении температуры газа. Рассматривая идеальный газ, будем учитывать количество теплоты, связанное только с изменением температуры газа (фазовые превращения – сжижение, отвердевание – для идеального газа невозможны). Расчёт количества теплоты основан на понятии о теплоёмкости вещества.

Удельная теплоёмкость – величина, показывающая, какое количество теплоты необходимо для изменения температуры одного килограмма вещества на один Кельвин: $c = \frac{Q}{m\Delta T}$.

Молярная теплоёмкость – величина, показывающая, какое количество теплоты необходимо для изменения температуры одного моля вещества на один Кельвин:

$$c^* = \frac{Q}{\frac{m}{M}\Delta T}.$$

Теплоёмкость газов зависит не только от их химического состава, но и от способа нагревания. Для простых изопроцессов различают теплоёмкость при постоянном объёме (c_v) и теплоёмкость при постоянном давлении (c_p). Для молярной теплоёмкости важен не химический состав молекул газа, а число степеней свободы молекул (i), например, для всех двухатомных газов (O_2, H_2, N_2 и др.). Молярные теплоёмкости одинаковы при одинаковых условиях нагревания.

Молярная теплоёмкость при постоянном объёме:

$$c_\text{v}^* = \frac{i}{2}R. \tag{4.20}$$

Молярная теплоёмкость при постоянном давлении:

$$c_\text{p}^* = \frac{i+2}{2}R. \tag{4.21}$$

Используя определение теплоёмкости, получаем формулы для расчёта количества теплоты:

$$Q = c^* \frac{m}{M}(T_2 - T_1), \text{ или } Q = cm(T_2 - T_1). \tag{4.22}$$

Таблица 4.2

Применение первого начала термодинамики к простейшим термодинамическим процессам

Процесс	***Расчёт работы***	***Расчёт количества теплоты***	***Расчёт изменения внутренней энергии***	***Первое начало термодинамики***
Общие формулы	$A = \int_{V_1}^{V_2} \rho dV$	$Q = c^* \cdot \nu \cdot \Delta T$	$\Delta U = \frac{i}{2} R \cdot \nu \Delta T$	$Q = \Delta U + A$
Изохорический	$A = 0$	$Q = c_V^* \cdot \nu \cdot \Delta T$	$\Delta U = \frac{i}{2} R \cdot \nu \Delta T$	$Q = \Delta U$
Изобарический	$A = p\Delta V$	$Q = c_p^* \cdot \nu \cdot \Delta T$	$\Delta U = \frac{i}{2} R \cdot \nu \Delta T$	$Q = \Delta U + A$
Изотермический	$A = \nu \cdot RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$Q = \nu \cdot RT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$\Delta U = 0$	$Q = A$
Адиабатический	$A = -\frac{i}{2} R \nu \Delta T$	$Q = 0$	$\Delta U = \frac{i}{2} R \cdot \nu \Delta T$	$\Delta U = -A,$ $-\Delta U = A$

4.3. Превращение внутренней энергии в механическую. Принцип действия тепловой машины

Тепловой машиной называют устройство, превращающее внутреннюю энергию вещества в механическую энергию движения тел (паровой двигатель, двигатель внутреннего сгорания и др.). Рассматривая применение первого начала термодинамики к изопроцессам, замечаем, что существует два процесса, в которых переход внутренней энергии в механическую происходит со 100 % КПД:

– при адиабатическом расширении $\Delta U = A$ – механическая работа совершается за счёт убыли внутренней энергии рабочего тела (газа или пара);

– при изотермическом расширении $Q = A$ – в работу превращается всё тепло, подводимое к системе (Q есть мера изменения внутренней энергии).

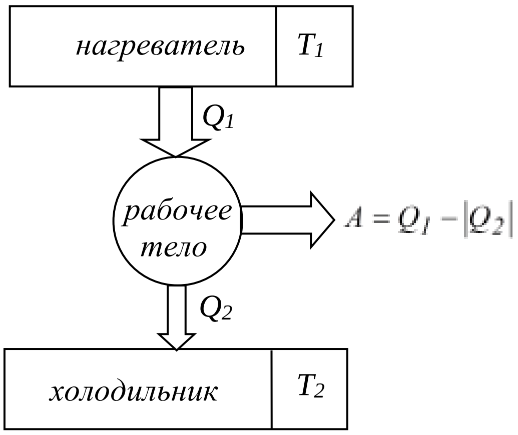

Рис. 4.5

см. см. Однако построить тепловую машину, работающую на однократном расширении рабочего тела невозможно (невозможно расширять газ до бесконечности!). Принципиальной особенностью тепловых машин является *цикличность их работы* – после расширения система возвращается в исходное состояние, а затем цикл повторяется многократно. Но из первого начала термодинамики следует, что при замкнутом цикле система неизбежно теряет часть тепла (Q_2) при возвращении в исходное состояние, поэтому полезная работа совершается за счёт разности количества теплоты (Q_1), полученного в процессе расширения, и количества теплоты (Q_2), отданного при сжатии (рис. 4.5): $A_{\text{полез}} = Q_1 - |Q_2|$.

Таким образом, ***термический КПД тепловой машины***, характеризующий эффективность превращения внутренней энергии в механическую, всегда оказывается меньше 100 %:

$$\eta = \frac{A_{\text{полез}}}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}, \text{ или } \eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} < 1. \qquad (4.23)$$

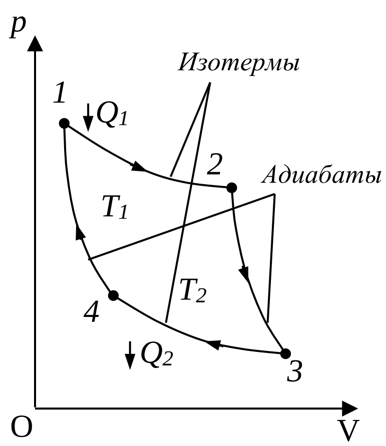

Рис. 4.6

На рис. 4.5 представлена принципиальная схема тепловой машины, которая содержит три обязательных элемента: нагреватель, имеющий температуру T_1; рабочее тело, совершающее полезную работу; холодильник с температурой $T_2<T_1$. Н. Л. Карно доказал, что максимально возможный КПД при заданных температурах нагревате-

ля и холодильника имеет тепловая машина, работающая по циклу, состоящему из двух изотерм и двух адиабат (рис. 4.6). ***КПД цикла Карно*** определяется только температурами нагревателя и холодильника:

$$\eta = \frac{\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2}{\mathrm{T}_1}. \qquad (4.24)$$

4.4. Примеры решения задач по термодинамике

Пример 1. В баллоне объёмом 10 л находится гелий под давлением p_1 = 1 МПа и при температуре T_1 = 300 К. После того как из баллона было взято m = 10 г гелия, температура в нем понизилась до T_2= 290 К. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение. В данной задаче рассматривается изменение макроскопических параметров газа при уменьшении его массы в баллоне. Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа:

$$p_2\mathrm{V} = \frac{m_2}{M} = RT_2, \qquad (1)$$

где m_3 – масса гелия в баллоне в конечном состоянии; M – молярная масса гелия; R – молярная газовая постоянная.

Из уравнения (1) выразим искомое давление

$$p_2 = \frac{m_2 RT_2}{M\mathrm{V}}. \qquad (2)$$

Массу m_2 гелия выразим через массу m_1, соответствующую начальному состоянию, и массу m гелия, взятого из баллона

$$m_2 = m_1 - m. \qquad (3)$$

Массу m_1 гелия найдём также из уравнения Менделеева – Клапейрона, применив его к начальному состоянию:

$$m_1 = \frac{Mp_1\mathrm{V}}{(RT_1)}. \qquad (4)$$

Подставив выражение массы m_1 в (3), а затем выражение m_2 в (4), найдём

$$p_2 = \left(\frac{Mp_1 V}{RT_1} - m\right)\frac{RT_2}{MV}, \text{ или } p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{M}\frac{RT_2}{V}. \qquad (5)$$

Проверим, даёт ли формула (5) единицу давления. Для этого в её правую часть вместо символов величин подставим их единицы. В правой части формулы – два слагаемых. Очевидно, что первое из них даёт единицу давления, так как состоит из двух множителей, первый из которых $\frac{T_2}{T_1}$ – безразмерный, а второй – давление. Проверим второе слагаемое:

$$\frac{[m][R][T]}{[M][V]} = \frac{1\text{кг}\cdot 1\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}\cdot 1\text{К}}{1\text{кг/моль}\cdot 1\text{м}^3} = \frac{1\text{кг}\cdot 1\text{моль}\cdot 1\text{Дж}\cdot 1\text{К}}{1\text{кг}\cdot 1\text{м}^3\cdot\text{моль}\cdot 1\text{К}} = \frac{1\text{Дж}}{1\text{м}^3} = \frac{1\text{Нм}}{1\text{м}^3} = 1\text{Па}$$

Паскаль является единицей давления. Произведём вычисления по формуле (4), учитывая, что $M = 4\cdot10^{-3}$ кг/моль:

$$p_2 = \frac{290}{300}\cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4\cdot 10^{-3}}\cdot\frac{8{,}31}{10^{-2}}\cdot 290 = 3{,}64\cdot10^5 \text{ Па} = 0{,}364 \text{ МПа}.$$

Ответ: p_2 = 0,364 Мпа.

Пример 2. Найти среднюю кинетическую энергию ($\varepsilon_{\text{вр.}}$) вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре T = 350 К, а также кинетическую энергию $E_к$ вращательного движения всех молекул кислорода массой m = 4 г.

Решение. В данной задаче температура рассматривается, как мера средней кинетической энергии молекул. На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия: $\langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle = \frac{1}{2}kT$, где k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура газа. Так как вращательному движению двухатомной молекулы (молекула кислорода – двухатомная) соответствуют две степени свободы, то средняя энергия вращательного движения молекулы кислорода

$$\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = 2\frac{1}{2}kT. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа

$$E_{\text{к}} = \langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle N. \qquad (2)$$

Число всех молекул газа

$$N = N_{\text{A}}\nu, \qquad (3)$$

где N_{A} – постоянная Авогадро; ν – количество вещества.

Если учесть, что количество вещества $\nu = m/M$, где m – масса газа; M – молярная масса газа, то формула (3) примет вид

$$N = N_{\text{A}}\frac{m}{M}.$$

Подставив выражение N в формулу (1), получаем

$$E_{к} = N_{\text{A}}\frac{m}{M}\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle. \qquad (4)$$

Произведём вычисления, учитывая, что для кислорода $M = 32{\cdot}10^{-3}$ кг/моль:

$\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = kT = 1{,}38{\cdot}10^{-23}{\cdot}350 = 4{,}83{\cdot}10^{-21}$ Дж;

$$E_{к} = \frac{6{,}02\cdot 10^{23}\cdot 4\cdot 10^{-3}\cdot 4{,}83\cdot 10^{-21}}{32\cdot 10^{-3}} = 364 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\langle \varepsilon_{\text{вр}} \rangle = 83{\cdot}10^{-21}$ Дж; $E_{\text{к}} = 364$ Дж.

Пример 3. Вычислить удельные теплоёмкости c_{V} и c_p смеси неона и водорода, если массовые доли неона и водорода составляют $w_1 = 80$ % и $w_2 = 20$ %.

Решение. В данной задаче вычисляются удельные теплоемкости смеси газов. Удельные теплоёмкости идеальных газов выражаются формулами:

$$c_{\text{V}} = \frac{i}{2}\frac{R}{M}, \; c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M}, \qquad (1)$$

где i – число степеней свободы молекулы газа; M – молярная масса.

Удельную теплоёмкость c_V смеси при постоянном объёме найдём следующим образом. Теплоту, необходимую для нагревания смеси на *ΔT*, выразим двумя способами:

$$Q = c_V(m_1 + m_2) \cdot \Delta T; \qquad (2)$$

$$Q = (c_{V,1}m_1 + c_{V,2}m_2) \cdot \Delta T, \qquad (3)$$

где $c_{V,1}$ – удельная теплоёмкость неона; $c_{V,2}$ – удельная теплоёмкость водорода.

Приравняв правые части (2) и (3) и разделив обе части полученного равенства на ΔT, получим $c_V(m_1 + m_2) = c_{V,1}m_1 + c_{V,2}m_2$.

Отсюда

$$c_V = c_{V,1}\frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{V,2}\frac{m_2}{m_1 + m_2}, \text{ или } c_V = c_{V,1}w_1 + c_{V,2}w_2, \qquad (4)$$

где $w_1 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$ и $w_2 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$.

Рассуждая так же, получим формулу для вычисления удельной теплоёмкости смеси при постоянном давлении:

$$c_p = c_{p,1}w_1 + c_{p,2}w_2. \qquad (5)$$

Подставляя (1) в (4) и (5) получаем:

$$c_V = \frac{i_1}{2}\frac{R}{M_1}w_1 + \frac{i_2}{2}\frac{R}{M_2}w_2;$$

$$c_p = \frac{i_1 + 2}{2}\frac{R}{M_1}w_1 + \frac{i_2 + 2}{2}\frac{R}{M_2}w_2.$$

Для неона (одноатомный газ) $i = 3$ и $M = 20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Для водорода (двухатомный газ) $i = 5$ и $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Произведём вычисления:

$$c_V = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}}0{,}8 + \frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}}0{,}2\right) = 2{,}58 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)} =$$

$$= 2{,}58 \text{ кДж/(кг·К)};$$

$$c_p = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31}{20 \cdot 10^{-3}} 0{,}8 + \frac{7}{2} \cdot \frac{8{,}31}{2 \cdot 10^{-3}} 0{,}2 \right) = 3{,}75 \cdot 10^3 \text{Дж/(кг·К)} =$$

$$= 3{,}75 \text{ кДж/(кг·К)}.$$

Ответ: c_V =2,58 кДж/(кг·К); c_p =3,75 кДж/(кг·К).

Пример 4. Кислород массой m = 2 кг занимает объём V_1 = 1 м^3 и находится под давлением p_1 = 0,2 МПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объёма V_2 = 3 м^3, а затем при постоянном объёме до давления p_3 = 0,5 МПа. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершённую им работу A и теплоту Q, переданную газу. Построить график процесса.

Решение. В данной задаче рассматривается процесс нагревания газа, который происходит последовательно сначала изобарически, а затем изохорически. Построим график процесса в координатных осях p–V.

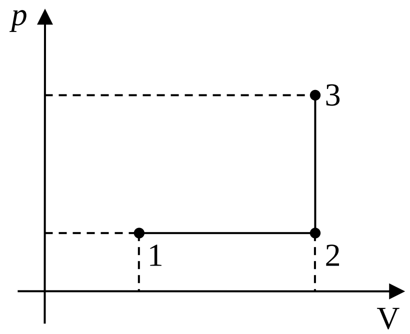

Рис. 4.7

Так как сначала газ изобарно расширялся, то этому процессу соответствует на графике отрезок 1–2 (см. рис. 4.7). Затем газ был изохорно нагрет, что приводит к увеличению давления; этому процессу соответствует на графике отрезок 2–3 (см. рис. 4.7).

Определение требуемых физических величин можно осуществить двумя вариантами.

Первый вариант. Изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U = c_V m \Delta T = \frac{i}{2} \frac{R}{M} m \Delta T, \qquad (1)$$

где i – число степеней свободы молекул газа (для двухатомных молекул кислорода i=5); $\Delta T = T_3 - T_1$ – разность температур газа в конечном (третьем) и начальном состояниях.

Начальную и конечную температуру газа найдём из уравнения Менделеева – Клапейрона: $pV = \frac{m}{M} RT$, откуда

$$T = \frac{pVM}{mR}.$$

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой

$$A_1 = \frac{m}{M} R\Delta T.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объёме, равна нулю:

$$A_2 = 0.$$

Следовательно, полная работа, совершаемая газом:

$$A = A_1 + A_2 = A_1.$$

Согласно первому началу термодинамики, теплота Q, переданная газу, равна сумме изменения внутренней энергии ΔU и работы A:

$$Q = \Delta U + A.$$

Произведём вычисления, учитывая, что для кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 385 \text{ К};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 1155 \text{ К};$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8{,}31} = 2887 \text{ К};$$

$$A_1 = \frac{8{,}31 \cdot 2 \cdot (1155 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} = 0{,}4 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 0{,}4 \text{ МДж};$$

$A = A_1 = 0{,}4$ МДж;

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{8{,}31 \cdot 2(2887 - 385)}{32 \cdot 10^{-3}} = 3{,}24 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3{,}24 \text{ МДж};$$

$Q = (3{,}24 + 0{,}4)$ МДж $= 3{,}64$ МДж.

Второй вариант. Воспользуемся графиком на рис. 4.7, тогда для участка 1–2 запишем первое начало термодинамики: $Q_1 = \Delta U_1 + A_1$.

Для изобарного процесса: $A_1 = p_1\,(V_2 - V_1)$, $\Delta U_1 = \frac{i}{2}\cdot\frac{m}{M}R(T_2 - T_1)$.

Воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона для состояний первого и второго (на графике точки 1 и 2, соответственно):

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M}RT_1; \qquad (2)$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{M}RT_2. \qquad (3)$$

Так как $p_1 = p_2$, то вычтя из уравнения (3) уравнение (2), получим

$p_1(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1)$, тогда $\Delta U_1 = \frac{i}{2}A_1$, $Q_1 = A_1(\frac{i}{2} + 1)$.

Для участка 2–3: $Q_2 = \Delta U_2 + A_2$. Этот участок соответствует изохорному процессу, значит $A_2 = 0$, $\Delta U_2 = \frac{i}{2}\cdot\frac{m}{M}R(T_3 - T_2)$.

Воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона для третьего состояния (на графике точка 3):

$$p_3 V_3 = \frac{m}{M}RT_3. \qquad (4)$$

Вычтем из уравнения (4) уравнение (3), получим

$p_3V_3 - p_2V_2 = \frac{m}{M}R(T_3 - T_2)$. Из графика видно, что $p_1 = p_2$, а $V_2 = V_3$,

откуда $V_2(p_3 - p_1) = \frac{m}{M}R(T_3 - T_2)$, тогда $\Delta U_2 = \frac{i}{2}V_2(p_3 - p_1)$, $Q_2 = \Delta U_2$.

Тогда $A = A_1$, $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$, $Q = Q_1 + Q_2$.

Произведем вычисления:

$A = 0{,}2\cdot 10^6(3 - 1) = 0{,}4\cdot 10^6$ Дж $= 0{,}4$ МДж;

$\Delta U = \frac{5}{2}\cdot 0{,}4\cdot 10^6 + \frac{5}{2}\cdot 10^6\,(0{,}5 - 0{,}2) = 3{,}25\cdot 10^6$ Дж $= 3{,}25$ МДж;

$Q = 0{,}4\cdot 10^6 + 3{,}25\cdot 10^6 = 3{,}65\cdot 10^6$ Дж $= 3{,}65$ МДж.

Ответ: $A = 0{,}4$ МДж; $\Delta U = 3{,}25$ МДж; $Q = 3{,}65$ МДж.

Пример 5. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0{,}02$ кг при температуре $T_1 = 300$ К. Водород сначала расширился адиабатно, увеличив свой объём в $n_1 = 5$ раз, а затем был сжат изотермически, причём объём газа уменьшился в $n_2 = 5$ раз. Найти температуру в конце адиабатного расширения и работу, совершаемую газом при этих процессах. Изобразить процесс графически.

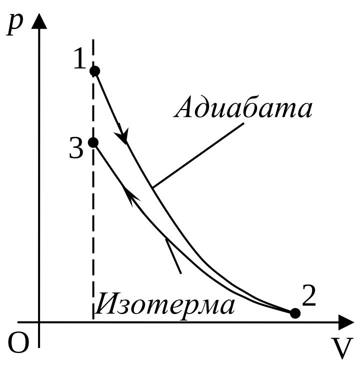

Рис. 4.8

Решение. В данной задаче рассматривают процессы адиабатного расширения и изотермического сжатия, которые происходят с идеальным газом (водородом). Температуры и объёмы газа, совершающего адиабатный процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \text{ или } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}},$$

где γ – отношение теплоёмкостей газа при постоянном давлении и постоянном объёме; $n_1 = \dfrac{V_2}{V_1}$.

Отсюда получаем следующее выражение для конечной температуры:

$$T_2 = \frac{T_1}{n_1^{\gamma-1}}.$$

Работа A_1 газа при адиабатном расширении может быть определена по формуле

$$A_1 = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R(T_1 - T_2),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объёме.

Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде

$$A_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2}, \text{ или } A_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{1}{n_2},$$

где $n_2 = \dfrac{V_2}{V_3}$.

Произведём вычисления, учитывая, что для водорода, как двухатомного газа: $\gamma = 1{,}4$; $i = 5$ и $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль:

$$T_2=\frac{300}{5^{1,4-1}}=\frac{300}{5^{0,4}}=\frac{300}{1,91}=157\text{ К};$$

$$A_1=\frac{0,02\cdot 5\cdot 8,31}{2\cdot 10^{-3}\cdot 2}(300-157)=29,8\text{ кДж};$$

$$A_2=\frac{0,02}{2\cdot 10^{-3}}8,31\cdot 157\ln\frac{1}{5}=-21\text{ кДж}.$$

Знак минус показывает, что при сжатии работа газа совершается над газом внешними силами. График процесса приведён на рис. 4.8.

Ответ: $A_1=29,8$ кДж; $A_2=-21$ кДж.

Пример 6. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура теплоотдатчика T = 500 К. Определить термический КПД η цикла и температуру T_2 теплоприёмника тепловой машины, если за счёт каждого килоджоуля теплоты, полученной от теплоотдатчика, машина совершает работу A = 350 Дж.

Решение. В данной задаче рассматривается тепловая машина, работающая по циклу Карно. Термический КПД тепловой машины показывает, какая доля теплоты, полученной от теплоотдатчика, превращается в механическую работу. Термический КПД выражается формулой

$$\eta=\frac{A}{Q_1},$$

где Q_1 – теплота, полученная от теплоотдатчика; A – работа, совершенная рабочим телом тепловой машины.

Зная КПД цикла, можно по формуле $\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}$ определить температуру охладителя T_2:

$$T_2=T_1(1-\eta).$$

Произведём вычисления: η = 350/1000 = 0,35;

T_2 = 500(1 – 0,35) К = 325 К.

Ответ: η = 0,35; T_2 = 325 К.

Контрольные вопросы

1. Термодинамическими называют процессы, в которых изменяются такие параметры вещества, как объём, температура, давление, внутренняя энергия и др. Простейшей термодинамической моделью является «идеальный газ».

Сформулируйте определение понятия «идеальный газ».

Назовите простейшие процессы, которые могут происходить с идеальным газом (изопроцессы), и укажите условия их протекания.

2. При изучении термодинамических процессов используются два метода: термодинамический (феноменологический) и статистический.

Сформулируйте в чём сущность каждого из этих методов.

Каковы специфические особенности статистических законов?

3. Микроскопические характеристики молекул идеального газа связаны с макроскопическими параметрами состояния вещества.

Запишите формулы, связывающие

– температуру газа с кинетической энергией молекул;

– давление газа с импульсами молекул;

– давление газа с кинетической энергией поступательного движения и со среднеквадратичной скоростью движения молекул;

– объём газа с общим количеством и концентрацией молекул.

4. Одним из основных статистических законов является закон Максвелла, определяющий характер распределения молекул по скоростям.

Что показывает функция распределения молекул по скоростям?

Изобразите графически вид этой функции.

Что такое «наиболее вероятная скорость», «среднеарифметическая скорость», «среднеквадратичная скорость»? Отметьте на графике эти скорости.

Почему среднеарифметическая скорость больше, чем наиболее вероятная?

5. *Как, зная вид функции распределения, можно определить долю молекул, скорости которых имеют значение в произвольном интервале от* V_1 *до* V_2*? Дайте графическую интерпретацию записанного соотношения.*

Как приближенно можно определить долю молекул, скорости которых имеют значение в узком интервале скоростей $\Delta V << V$*?*

6. Изобразите на одном рисунке два распределения молекул по скоростям для одного и того же газа при разных температурах.

Можно ли утверждать, что при нагревании скорость движения любой молекулы становится больше?

Какие изменения в характере распределения происходят при повышении температуры вещества?

Как вы понимаете утверждение, что понятие «температура» имеет статистический смысл?

7. Одним из следствий статистического закона Больцмана, описывающего распределение молекул по потенциальным энергиям, является закон распределения молекул идеального газа по высоте в поле силы тяжести Земли.

Запишите этот закон аналитически.

Изобразите на одном рисунке графики изменения концентрации молекул с высотой для одного и того же газа при разных температурах (на рисунке укажите, какой график соответствует большей температуре). Сформулируйте словами выводы, которые можно сделать на основе сравнения этих графиков.

Изобразите на одном рисунке графики изменения концентрации молекул с высотой для двух разных газов при одной и той же температуре (на рисунке укажите, какой график относится к газу с большей *молярной массой). Сформулируйте словами выводы, которые можно сделать на основе сравнения этих графиков.*

8. Запишите уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона).

Как определяется молярная масса вещества?

Как определяется количество молей вещества?

Какова связь абсолютной термодинамической температуры с температурой, измеренной по шкале Цельсия?

Опираясь на уравнение состояния идеального газа, получите уравнения для разных изопроцессов и изобразите графически характер связи между параметрами газа в этих процессах.

9. Важнейшим параметром, характеризующим состояние вещества, является внутренняя энергия.

Какова молекулярная трактовка этого понятия для идеального газа?

От каких макропараметров зависит внутренняя энергия идеального газа? Запишите соответствующую формулу.

Назовите способы изменения внутренней энергии.

10. Переход газа из одного состояния с параметрами P_1, V_1, T_1 в другое с параметрами P_2, V_2, T_2 может осуществляться разными способами (с помощью разных процессов). Основной закон термодинамики – первое начало термодинамики – выражает закон сохранения энергии для таких переходов.

Запишите первое начало термодинамики.

Какие из величин, входящих в этот закон, являются функциями состояния системы и не зависят от способа перехода газа из одного состояния в другое (рассчитываются одинаково во всех процессах)?

Какие из величин, входящих в этот закон, являются функциями процесса, т. е. зависят от способа перехода газа из одного состояния в другое и рассчитываются по-разному в разных процессах?

11. Количество теплоты, работа и изменение внутренней энергии могут входить в уравнение первого начала термодинамики с разными знаками.

Как физически интерпретировать ситуацию, если $Q > 0$*?* $Q < 0$*?*

Как физически интерпретировать ситуацию, если $A > 0$*?* $A < 0$*?*

Как физически интерпретировать ситуацию, если $\Delta U > 0$*?* $\Delta U < 0$*?*

12. *Запишите правило для расчета работы при изменении объёма газа в общем случае.*

Запишите формулы для расчёта работы газа для частных случаев (для разных изопроцессов).

В каком изопроцессе работа равна нулю?

13. Запишите формулу для расчёта количества теплоты при изменении температуры газа, используя понятие «молярная теплоёмкость вещества».

Что показывает молярная теплоёмкость вещества?

От чего зависит молярная теплоёмкость идеального газа?

Запишите формулы для определения молярной теплоёмкости газа при постоянном объёме и при постоянном давлении?

Почему теплоёмкость газа при постоянном объёме меньше, чем при постоянном давлении? (ответ обоснуйте, опираясь на первое начало термодинамики)

14. *В каком процессе осуществляется ситуация, когда к газу подводится (или отводится) некоторое количество теплоты, но температура газа при этом не изменяется? Запишите первое начало термодинамики для такого процесса.*

15. *В каком процессе осуществляется ситуация, когда отсутствует теплообмен с окружающей средой (*$Q = 0$*), но при этом температура газа изменяется? Запишите первое начало термодинамики для такого процесса. В каком случае происходит нагревание газа, а в каком – его охлаждение?*

16. Тепловая машина – это устройство, преобразующее внутреннюю энергию вещества в механическую.

Как вы понимаете утверждение: «Все тепловые машины работают циклически»? Назовите основные элементы тепловой машины и покажите схематически процессы теплообмена между этими элементами.

Как определяется термический КПД тепловой машины?

Почему КПД тепловой машины всегда меньше 1 (меньше 100 %)?

17. Что такое «идеальная тепловая машина»?

Может ли КПД идеальной машины быть равен 100 %?

Из каких процессов состоит цикл Карно? Изобразите этот цикл в координатах P–V.

От чего зависит КПД цикла Карно? Запишите соответствующую формулу для его вычисления.

Рекомендуемая литература

1. Грабовский Р. И. Курс физики: учебник. 12-е изд. стер. Санкт-Петербург: Лань, 2012. 608 с.

2. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 1: Механика, Молекулярная физика: учеб. пособие. Санкт-Петербург: Лань, 2008. 432 с.

3. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие. Москва: Высшая школа, 2007. 560 с.

4. Фриш С. Э., Тиморева А. В. Курс общей физики. Т. 1: Физические основы механики, Молекулярная физика, Колебания и волны: учебник. Санкт-Петербург: Лань, 2009. 480 с.

Глава 5. Задания для самостоятельного решения по разделам «Механика», «Электродинамика», «Термодинамика»

Требования к оформлению контрольных работ

1. Контрольные работы выполняются в школьной тетради. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по таблицам с учётом направления подготовки. Номер варианта определяется по последней цифре номера зачётной книжки.

2. Условия задач контрольной работы надо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставлять поля.

3. Решение каждой задачи необходимо начинать с краткого описания сущности рассматриваемого явления (2–3 предложения!) и формулировки основного закона, описывающего явление, с расшифровкой всех буквенных обозначений.

4. Далее приводится краткая запись условия и, где это возможно, поясняющий рисунок. Каждый шаг в ходе решения следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями.

5. Решать задачу надо в общем виде (в буквенных обозначениях). Полученную расчётную формулу проверить по единицам измерения.

6. Числовые значения величин при подстановке их в расчётную формулу следует выражать только в единицах СИ. Числовые значения физических констант и табличных коэффициентов приведены в Приложении А.

7. При подстановке в расчётную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать в стандартной форме. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52\cdot10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29\cdot10^{-3}$ и т. п.

8. Вычисления по расчётной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный результат следует записывать с тремя значащими цифрами.

Механика

101. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота от времени определяется уравнением $\varphi = (1 + 2t - 2t^3)$. Для точек, лежащих на ободе колеса, определить угол, составляемый вектором полного ускорения с радиусом колеса через 2 секунды, если их нормальное ускорение в этот момент равно 200 м/с^2. Определить радиус колеса. Построить графики зависимости углового ускорения, угловой скорости и угла поворота от времени.

102. Точка движется по окружности радиуса R со скоростью $\upsilon = k \cdot t$, где k = 0,5 м/с^2. Найти её нормальное ускорение в момент, когда она пройдёт 0,1 длины окружности после начала движения, а также угол, составляемый вектором полного ускорения со скоростью в этот момент. Построить графики зависимости тангенциального ускорения, скорости и пути от времени.

103. Тело движется по дуге окружности радиусом 38 м. Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $S = \mathrm{A}t - \mathrm{B}t^2 + \mathrm{C}t^3$, где A = 2 м/с, B = 3м/с^2 , C = 4м/с^3. Найти угол, составляемый вектором полного ускорения со скоростью в момент времени t_1 = 2 с. Построить графики зависимости тангенциального ускорения, скорости и пути от времени.

104. Зависимость пройденного телом пути от времени задаётся уравнением $S = -\mathrm{A}t + \mathrm{B}t^2 + \mathrm{C}t^3$, где A = 6,68 м/с, B = 0,14 м/с^2 , C = 0,01 м/с^3. Через сколько времени после начала движения тангенциальное ускорение будет равно 1 м/с^2? Определить радиус кривизны траектории, если известно, что в этот момент времени угол между вектором полного ускорения и радиусом кривизны равен 45°. Построить графики зависимости тангенциального ускорения, скорости и пути от времени.

105. Стержень длиной L начинает вращаться вокруг оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, с постоянным угловым ускорением ε. Определить длину стержня, линейную скорость и полное линейное ускорение свободного конца стержня при $t = 5$ с, если известно, что в этот момент времени его нормальное ускорение равно 80 м/с^2, а стержень за 5 с сделал шесть оборотов. Построить графики зависимости углового ускорения, угловой скорости и угла поворота от времени.

106. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью 30 м/с. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорение камня в конце второй секунды движения и радиус кривизны траектории в этот момент времени. Сопротивлением воздуха пренебречь. Построить графики зависимости координат камня от времени $x(t)$ и $y(t)$, а также проекций его скорости на координатные оси $\upsilon_x(t)$ и $\upsilon_y(t)$.

107. Тело брошено под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту со скоростью $\upsilon_0 = 40$ м/с. Каковы будут нормальное и тангенциальное ускорения тела через 2 с после начала движения? Найти радиус кривизны траектории в этот момент времени. Сопротивлением воздуха пренебречь. Построить графики зависимости координат тела от времени $x(t)$ и $y(t)$, а также проекций его скорости на координатные оси $\upsilon_x(t)$ и $\upsilon_y(t)$.

108. Материальная точка движется в плоскости xy согласно уравнениям $x = -6t + 3t^2$ и $y = 2t - t^2$. Найти модули скорости и ускорения точки в момент времени $t_1 = 8$ с, а также тангенциальное ускорение точки в этот момент. Построить графики зависимости координат тела от времени $x(t)$ и $y(t)$, а также проекций его скорости на координатные оси $\upsilon_x(t)$ и $\upsilon_y(t)$.

109. Диск радиусом 20 см вращается так, что закон изменения угла поворота с течением имеет вид $\varphi = 3 - t + 0{,}1t^3$. Для точки, лежащей на ободе диска, определить угол, составляемый вектором полного линейного ускорения со скоростью в момент времени t_1 = 1с, а также характер движения диска в этот момент времени. Построить графики зависимости углового ускорения, угловой скорости и угла поворота от времени.

110. Камень брошен со скоростью 11 м/с под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить угол α и время подъёма камня до высшей точки, если радиус кривизны траектории в верхней точке равен 3 м (ускорение свободного падания принять равным 10 м/с^2). Построить графики зависимости координат тела от времени $x(t)$ и $y(t)$, а также проекций его скорости на координатные оси $\upsilon_x(t)$ и $\upsilon_y(t)$.

111. По окружности шкива радиусом 5 см, скрепленного с валом колеса, намотана нить, к концу которой привязана гиря массой 2 кг. Гиря из состояния покоя опустилась на высоту 1,5 м в течение 6 с. Пренебрегая трением, определить момент инерции системы и силу натяжения нити.

112. На вершине наклонной плоскости с углом наклона α = 30^o к горизонту прикреплен блок массой 0,5 кг. Через блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Один груз массой m_1 = 1 кг движется по наклонной плоскости, а другой массой m_2 опускается по вертикали вниз. Определить массу опускающегося груза, если он за 2 с опустился на высоту 0,8 м. Проскальзыванием нити по блоку и силой трения в системе пренебречь. Массу блока считать равномерно распределённой по ободу.

113. Через неподвижный блок, представляющий собой сплошной диск радиусом 4 см и массой 0,2 кг, перекинута легкая нерастяжимая нить на концах которой привязаны грузы массами 0,3 и 0,2 кг. При движении нить не проскальзывает по блоку. Определить ускорение грузов и силу давления блока на ось.

114. Тело соскальзывает с наклонной плоскости с углом наклона α = 20° к горизонту. При каком значении коэффициента трения тело движется равномерно? Во сколько раз сила трения и сила нормального давления тела на плоскость меньше силы тяжести?

115. К краю стола прикреплён блок. Через блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы. Один груз движется по поверхности стола, а другой опускается по вертикали вниз. Определить коэффициент трения между поверхностями груза и стола, если массы грузов $m_1 = 2m_0$; $m_2 = m_0$; масса блока $m = m_0$. Грузы движутся с ускорением 1 м/с^2. Проскальзыванием нити по блоку и силой трения в блоке пренебречь.

116. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через один из его концов согласно уравнению $\varphi = \mathrm{A}t + \mathrm{B}t^2 + \mathrm{C}t^3$, где A = –2 рад/с; B = –2 рад/с^2; C = 0,5 рад/с^3. Определить момент сил, действующий на стержень через 3 с после начала вращения, если масса стержня 0,3 кг, а его длина 71 см. Определить также угловое ускорение стержня в момент остановки.

117. Полый тонкостенный цилиндр вращается под действием постоянного момента сил равного 2,5 Нм. На рис. 5.1 изображён график изменения его угловой скорости. Определить массу цилиндра, если его диаметр равен 20 см.

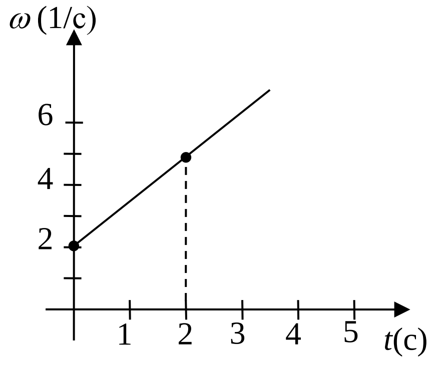

Рис. 5.1

118. Самолет, летящий со скоростью 900 км/час, выполняет «мёртвую петлю» радиусом 700 м. Во сколько раз отличаются силы, прижимающие летчика к сидению самолёта, когда он находится в нижней и верхней точках мёртвой петли?

119. Диск вращается вокруг вертикальной оси, делая 30 об/мин. На расстоянии 20 см от оси на диске лежит тело. Каков должен быть коэффициент трения между телом и диском, чтобы тело не соскользнуло с диска?

120. Сплошной цилиндр массой 4 кг и радиусом 15 см вращается согласно уравнению $\varphi = 9t^2 - 3t^3 + 2$. Сравнить моменты сил, действующие на цилиндр в момент остановки, в двух ситуациях:

а) цилиндр вращается вокруг оси, совпадающей с осью симметрии;

б) цилиндр вращается вокруг оси, совпадающей с образующей цилиндра.

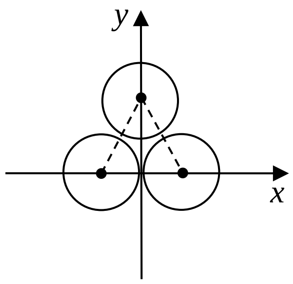

Рис. 5.2

121. Три одинаковых абсолютно упругих шара висят, касаясь друг друга, на трёх параллельных нитях одинаковой длины. Один из шаров отклоняют по направлению, перпендикулярному прямой, соединяющей центры двух других шаров, и отпускают. В момент удара этот шар имеет скорость υ_1 = 1 м/с, а затем отскакивает в противоположном направлении со скоростью u_1 (см. рис. 5.2). Определить скорости шаров после удара.

122. Частица массой m_1, летящая со скоростью $\upsilon_1 = 2\cdot10^2$м/с, сталкивается с неподвижной частицей массой $m_2 = 4\ m_1$. После соударения первая частица движется в противоположном направлении, а четвертая часть её энергии уходит на нагревание и деформацию. Определить скорости частиц после соударения.

123. Снаряд массой m_1=100 кг, летящий вдоль железнодорожного полотна под углом $\alpha = 37^\circ$ к горизонту со скоростью υ_1 = 500 м/с, попадает в платформу с песком, массой 5 т, движущуюся навстречу снаряду со скоростью υ_2 = 10 м/с. Снаряд застревает в песке. После столкновения со снарядом платформа проходит путь S = 12,5 м и останавливается под действием силы трения. Определить скорость платформы после столкновения и коэффициент трения между платформой и рельсами μ (принять $m_1 + m_2 \approx m_2$, $g \approx 10$ м/с^2).

124. Массивная штанга длиной L = 1 м и массой m_1 = 12 кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из её концов. В другой конец попадает пуля массой 10 г, летящая со скоростью υ_0 = 400 м/с горизонтально, и застревает в ней. Штанга отклоняется и центр масс системы поднимается на высоту h. Определить угол отклонения штанги и высоту, на которую поднимается центр масс ($g\approx$10 м/с^2).

125. При горизонтальном полёте со скоростью 300 м/с снаряд массой m$_0$ разорвался на две части. Большая часть массой 0,6 m_0 получила скорость 450 м/с в направлении полёта снаряда. Определить модуль и направление скорости меньшей части снаряда, а также расстояние по горизонтали, на которое улетит вторая часть снаряда от точки взрыва, произошедшего на высоте 80 м.

126. Найти линейную скорость движения центра масс шара, скатывающегося без скольжения с наклонной плоскости высотой h = 0,5 м, в конце этой плоскости. Сравнить найденную скорость со скоростью тела, соскальзывающего с этой плоскости при отсутствии трения. Начальные скорости тел равны нулю. Трением качения пренебречь.

127. Шар и цилиндр, имеющие одинаковые массы и радиусы катятся по горизонтальной поверхности с одинаковыми линейными скоростями, а затем вкатываются на горку с углом наклона к горизонту 30^o. Сравнить пути, пройденные телами по горке до высшей точки подъёма. Силой трения пренебречь.

128. На платформе, вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью 3 рад/с, стоит человек и держит в руках стержень, расположенный вертикально. Центры масс стержня и человека находятся на оси платформы. С какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если повернуть стержень относительно оси, проходящей через середину стержня, в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и платформы 6 кг м^2. Длина стержня 3 м, а масса 10 кг. Определить работу, произведённую при повороте стержня.

129. Небольшое тело соскальзывает без трения вниз по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиуса R. С какой высоты должно начать двигаться тело, чтобы не оторваться от желоба в верхней точке петли?

130. Определить КПД неупругого удара бойка массой 600 кг, падающего на сваю массой 200 кг. Как изменится КПД при одновременном уменьшении массы сваи и массы бойка в 2 раза? Как изменится КПД при одновременном увеличении массы сваи и массы бойка на 100 кг? (Примечание: при неупругом ударе механическая энергия системы тел не сохраняется, её изменение определяет работу, затраченную на преодоление сопротивления грунта при вбивании сваи. Коэффициентом полезного действия в данной ситуации является отношение работы, затраченной на вбивание сваи, к первоначальной энергии бойка перед ударом).

131. В системе K' покоится стержень, собственная длина которого L_0= 1 м, стержень расположен так, что составляет угол φ_0 = 45^o с осью X'. Определить длину стержня и угол φ в системе K, если скорость υ_0 системы K' относительно системы K составляет 0,8 с.

132. В лабораторной системе отсчёта K пи-мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние L =75 м. Скорость пи-мезона равна 0,995 с. Определить собственное время жизни пи-мезона.

133. Собственное время жизни мю-мезона равно 2 мкс. От точки рождения до точки распада в лабораторной системе отсчёта K мю-мезон пролетел расстояние L = 6 км. С какой скоростью (в долях скорости света) двигался мю-мезон?

134. Частица движется со скоростью υ = 0,5 с. Во сколько раз релятивистская масса частицы больше массы покоя?

135. С какой скоростью движется частица, если её релятивистская масса в три раза больше массы покоя?

136. Отношение заряда движущегося электрона к его массе, определённое из опыта равно $0{,}88 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Определить релятивистскую массу электрона и его скорость.

137. На сколько процентов релятивистская масса частицы больше массы покоя при скорости $\upsilon = 30$ Мм/с?

138. Кинетическая энергия электрона 10 Мэ-В. Во сколько раз его релятивистская масса больше массы покоя?

139. Кинетическая энергия релятивистской частицы равна её энергии покоя. Во сколько раз возрастёт импульс частицы, если её кинетическая энергия увеличится в четыре раза? Определить во сколько раз возрастет импульс частицы, если её кинетическая энергия увеличится в четыре раза для частицы, движущейся со скоростью, много меньшей, чем скорость света.

140. Релятивистское сокращение длины тела составило 30 %. Каковы скорость и кинетическая энергия тела, если масса покоя тела m_0?

141. Поезд движется по закруглению радиусом 765 м со скоростью 72 км/ч. Определите, на сколько внешний рельс должен быть выше внутреннего, чтобы сила давления на рельсы была одинаковой. Расстояние между рельсами равно 1,5 м.

142. На вращающийся с частотой 78 об/мин горизонтальный диск положили предмет на расстоянии 7,5 см от оси вращения. Определить коэффициент трения между предметом и диском, если предмет не скользит по диску.

143. На вираже летчик поворачивает корпус самолета по отношению к направлению движения на угол $\alpha = 10°$. Скорость полета $\upsilon = 360$ км/час. Найти радиус поворота.

144. По касательной к шкиву маховика в виде диска диаметром D = 60 см и массой m = 50 кг приложена сила F = 0,8 кН. Определить угловое ускорение ε и частоту вращения n маховика через время t = 30 с после начала действия силы. Силой трения пренебречь. Сколько оборотов сделает маховик за это время?

145. Найдите силу упругости нити в момент, соответствующий рис. 5.3, если масса груза равна m = 100 г, скорость υ = 2 м/с, угол $\alpha = 60^{\circ}$, длина нити 40 см.

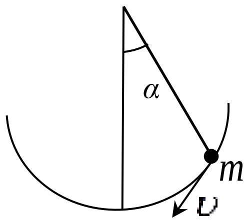

Рис. 5.3

146. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы m_1 и m_2 ($m_1 \neq m_2$), общая масса которых m = 1 кг. Грузы начинают равномерно двигаться и за t = 0,5 с проходят путь S = 0,75 м. Определите силу давления оси на блок.

147. На гладком горизонтальном столе лежит брусок, к которому привязана нить, перекинутая через блок, укреплённый на краю стола. Если за нить тянуть с силой F_1 = 19,6 Н, то брусок будет двигаться с ускорением α_1 = 9,8 м/с^2. Каковы будут ускорение бруска α_1 и сила натяжения F_2 нити, если к её концу привязать груз массой m = 2 кг.

148. На обод маховика диаметром D = 40 см намотан шнур, к концу которого привязан груз массой m = 8 кг. Определить момент инерции J маховика, если он, вращаясь равноускорено под действием силы тяжести груза, за время t = 10 с приобрел частоту вращения 45 об/мин.

149. На однородный сплошной цилиндрический барабан радиусом r = 20 см и массой M = 2 кг, намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой m = 0,5 кг. До начала вращения барабана груз поднят на высоту h = 2,3 м от пола. Определите: 1) время опускания груза до пола; 2) силу натяжения нити; 3) кинетическую энергию груза в момент удара о пол.

150. На диске проигрывателя установлен вертикальный стержень, к которому подвешен шарик на нити длиной l = 48 см. Расстояние стержня от оси вращения диска r = 10 см. После включения проигрывателя нить отклоняется на угол $\alpha = 45^\circ$. Найдите угловую скорость и частоту вращения диска.

151. Человек прыгает в воду с высоты h = 10 м. На какую глубину H он бы при этом погрузился, если бы силы сопротивления воздуха и воды исчезли? Масса человека m = 60 кг, объём его тела V = 66 л.

152. Пуля, летящая горизонтально со скоростью υ = 400 м/с, попадает в подвешенный на невесомой нити брусок и застревает в нём. Какова длина нити, если брусок отклонился на угол $\alpha = 60°$? Масса пули m = 20 г, масса бруска M = 5 кг.

153. Груз массой m_1 падает на плиту массой m_2, укреплённую на пружине жесткостью k . Определите наибольшее сжатие пружины $x_{\max}$, если в момент удара груз обладал скоростью υ. Удар неупругий.

154. Стоящий на льду человек массой M = 60 кг ловит мяч массой m = 0,5 кг, который летит горизонтально со скоростью υ_1 = 20 м/с. На какое расстояние откатится человек с мячом по горизонтальной поверхности льда, если коэффициент трения μ равен 0,03?

155. Маховик в виде диска массой 60 кг и радиусом 20 см был раскручен до частоты 480 об/мин и, сделав 200 оборотов, остановился под действием силы трения. Найти момент силы трения, считая её постоянной, и работу торможения.

156. Пять одинаковых шаров, центры которых лежат на одной прямой, находятся на небольшом расстоянии друг от друга. В крайний шар ударяется такой же шар, имеющий скорость υ_0 = 20 м/с, которая направлена вдоль линии, соединяющей центры шаров. Найдите скорость последнего шара, считая соударения шаров абсолютно упругими.

157. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на высоте 200 м на две одинаковые части. Через 1 с после взрыва одна часть падает на Землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии от места выстрела упадёт вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии $1 \cdot 10^3$ м?

158. Снаряд массой 10 кг вылетает из орудия со скоростью 400 м/с под углом 60° к горизонту. В верхней точке траектории снаряд разорвался на два осколка, которые разлетелись под прямым углом, причём осколок массой 6 кг полетел вперед под углом 30° к горизонту. Определить скорости осколков после взрыва. На какой высоте разорвался снаряд?

159. Снаряд массой 10 кг, летевший вертикально вверх, на высоте 1 км имел скорость 200 м/с. В этой точке он разорвался на две части. Одна часть массой 3 кг получила скорость 400 м/с под углом 30° к первоначальному направлению. Определить направление и скорость полета второго осколка. Через какое время после взрыва первый осколок упадет на Землю?

160. Тонкостенный цилиндр с диаметром основания 30 см и массой 12 кг вращается согласно уравнению $\varphi = \varphi_0 - 2t + 0{,}2t^2$ рад. Определить действующий на цилиндр момент сил в момент времени $t = 3$ с. Какую работу совершат силы, действующие на цилиндр, за 3 с от начала движения?

Электрическое поле

201. Между пластинами плоского конденсатора находится точечный заряд $q = 30$ нКл. Поле конденсатора действует на заряд с силой равной 20 мН. Определить силу взаимного притяжения пластин, если площадь каждой пластины $S = 100$ см^2.

202. Параллельно бесконечной пластине, несущей положительный заряд, равномерно распределённый по площади с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 20$ нКл/м^2, на расстоянии $r = 20$ см расположена тонкая нить с равномерно распределённым отрицательным зарядом, линейная плотность которого τ = 0,4 нКл/м. Сравнить напряжённости электрического поля в точках, лежащих на одной силовой линии поля плоскости, по обе стороны от нити на расстоянии 10 см от неё. Определить силу, действующую на отрезок нити длиной 1 м.

203. Две параллельные, бесконечно длинные нити несут заряд, равномерно распределённый по длине с линейными плотностями τ_1= 0,1 мкКл/м и τ_2 = 0,2 мкКл/м. Определить силу взаимодействия, приходящуюся на отрезок нити длиной 1 м, а также напряжённость электрического поля в средней точке между нитями, если расстояние между ними равно 20 см.

204. Два точечных заряда $Q_1 = 2Q_0$ и $Q_2 = -Q_0$ находятся на расстоянии d друг от друга. Найти положение точки на прямой, проходящей через эти заряды, в которой

а) потенциал электрического поля равен нулю;

б) напряженность поля равна нулю.

205. Электрическое поле создано бесконечной плоскостью равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ = 30 мкКл/м^2 и точечным зарядом q = 1,4 мкКл, расположенным на расстоянии r = 8 см от плоскости. Определить напряженность и потенциал поля в точке A, находящейся на расстоянии r от плоскости и на расстоянии $2r$ от точечного заряда.

206. Электрическое поле создано системой точечных зарядов, расположенных в одной плоскости в точках A, B, C. Определить напряжённость и потенциал поля в точке K. Координаты точек (в см) указаны в табл. 5.1.

Таблица 5.1

q_A, нКл	q_B, нКл	q_C, нКл	A(x_1;y_1)	B(x_2;y_2)	C(x_3;y_3)	K(x;y)
+2.5	+12.5	–5	(0;0)	(5;5)	(10;0)	(5;0)

207. Электрическое поле создано системой точечных зарядов, расположенных в одной плоскости в точках *A*, *B*, С. Определить напряжённость и потенциал поля в точке К. Координаты точек (в см) указаны в табл. 5.2.

Таблица 5.2

q_A, нКл	q_B, нКл	q_C, нКл	A(x_1;y_1)	B(x_2;y_2)	C(x_3;y_3)	K(x;y)
+3.4	–6	+2.6	(0;0)	(5;3)	(5;0)	(5;-3)

208. На концах отрезка длиной *a* находятся два одинаковых по абсолютной величине разноименных заряда. Напряжённость результирующего поля в средней точке отрезка равна E_0. Определить как и во сколько раз напряжённость поля в точке, отстоящей от каждого из зарядов на расстоянии *a*, отличается от E_0.

209. Две длинные разноименно заряженные нити расположены параллельно друг другу на расстоянии «*a*». Напряжённость результирующего поля посредине между нитями равна E_0. Определить, как и во сколько раз напряженность электрического поля в точке *K* отличается от E_0, если эта точка расположена на расстоянии «*a*» от каждой из нитей вне отрезка между нитями. Линейные плотности зарядов на нитях одинаковы по численному значению.

210. В двух вершинах равностороннего треугольника со стороной *a* = 10 см находятся равномерно заряженные (с одинаковой плотностью заряда) длинные тонкие стержни, расположенные перпендикулярно плоскости треугольника. Напряжённость поля в третьей вершине треугольника равна $3{,}12 \cdot 10^6$ В/м. Определить линейную плотность заряда на стержнях, если заряды стержней одноименные. Изменится ли напряжённость поля в третьей вершине треугольника, если заряды стержней будут разноименные? Ответ пояснить с помощью рисунка.

211. Две заряженные непроводящие вертикально расположенные пластины находятся на расстоянии 5 см друг от друга. Напряжённость поля между ними $E = 10^4$ В/м. Между пластинами на равном расстоянии от них помещен шарик с зарядом $q = 10^{-5}$ Кл и массой $m = 2$ г. После того как шарик отпустили, он начал падать. Через какое время шарик ударится об одну из пластин? На каком расстоянии от первоначального положения шарика это произойдет?

212. Протон и альфа-частица, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в электрическое поле плоского конденсатора параллельно его пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше, чем отклонение альфа-частицы? Во сколько раз и как отличаются работы, совершённые полем конденсатора при перемещении этих частиц?

213. Протон и альфа-частица, имеющие одинаковые импульсы, влетают в электрическое поле плоского конденсатора параллельно его пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше, чем отклонение альфа-частицы? Во сколько раз и как отличаются работы, совершённые полем конденсатора при перемещении этих частиц?

214. Электрон влетает в плоский вакуумный горизонтальный конденсатор параллельно пластинам со скоростью υ_0. Разность потенциалов между пластинами $U = 74$ В, длина пластин $L = 20$ см, Определить направление скорости электрона при вылете из конденсатора (по отношению к первоначальному направлению), если числовое значение скорости при вылете $\upsilon = 10{,}2 \cdot 10^6$ м/с, а время движения в поле конденсатора $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ с. Определить также тангенциальное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n, полное ускорение a при вылете электрона из конденсатора и отклонение по вертикали h. Силой тяжести пренебречь.

215. Электрон влетает в плоский вакуумный горизонтальный конденсатор параллельно пластинам со скоростью $\upsilon_0 = 8$ Мм/с. Расстояние между пластинами $d = 4$ см. При вылете из конденсатора направление скорости электрона составляет угол $\alpha = 30°$ с первоначальным направлением, а смещение по вертикали h = 2,9 см. Определить разность потенциалов между пластинами U, длину пластин L, время движения электрона в поле конденсатора τ, а также скорость υ, тангенциальное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n, полное ускорение a при вылете электрона из конденсатора. Силой тяжести пренебречь.

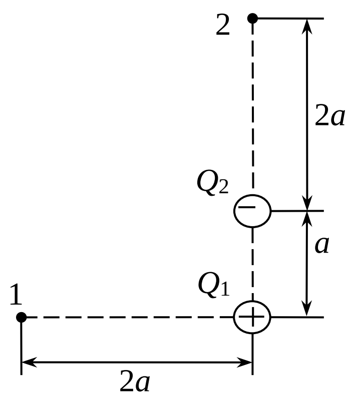

Рис. 5.4

216. Электрическое поле создано зарядами Q_1 = 2 мкКл и Q_2 = –2 мкКл, находящимися на расстоянии a = 10 см друг от друга (см. рис. 5.4). Определить работу сил поля, совершаемую при перемещении заряда Q = 0,5 мкКл из точки 1 в точку 2.

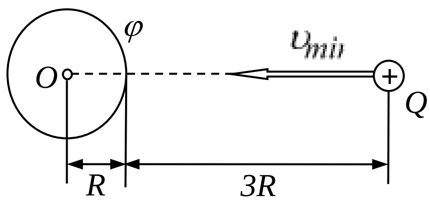

Рис. 5.5

217. Какой минимальной скоростью $\upsilon_{\min}$ должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности заряженного до потенциала φ = 400 В металлического шара (см. рис. 5.5)?

218. Электрон влетает в плоский вакуумный горизонтальный конденсатор параллельно пластинам со скоростью υ_0. Разность потенциалов между пластинами U = 50 В. При вылете из конденсатора смещение электрона по вертикали h =1,76 см, его полное ускорение a = $3{,}52 \cdot 10^{14}$ м/с^2, а направление скорости электрона составляет угол α = 12° с первоначальным направлением. Определить длину пластин L, время движения электрона в поле конденсатора τ, его начальную скорость, а также скорость, тангенциальное и нормальное ускорение электрона при вылете из конденсатора. Силой тяжести пренебречь.

219. Электрон влетает в плоский вакуумный горизонтальный конденсатор параллельно пластинам со скоростью υ_0. Длина пластин

L = 4 см, расстояние между ними d = 2,5 см. При вылете из конденсатора электрон имел скорость равную $8{,}2 \cdot 10^6$ м/с, направленную под углом α = 15° по отношению к первоначальному направлению. Определить разность потенциалов между пластинами U, начальную скорость υ_0, а также полное, нормальное и тангенциальное ускорение электрона при вылете из конденсатора и его смещение по вертикали. Силой тяжести пренебречь.

220. Электрон с энергией T = 400 эВ (в бесконечности) движется вдоль силовой линии по направлению к поверхности металлической заряженной сферы радиусом 10 см. Определить минимальное расстояние, на которое приблизится электрон к поверхности сферы, если её заряд Q = –10 нКл.

221. Конденсаторы ёмкостью C_1 = 5 мкФ и C_2 = 10 мкФ заряжены до напряжений U_1 = 60 В и U_2 = 100 В, соответственно. Определить напряжение на обкладках конденсаторов после их параллельного соединения обкладками, имеющими одноименные заряды. Как изменится это напряжение, если из второго конденсатора удалить пластинку диэлектрика, диэлектрическая проницаемость которого ε = 2?

222. Конденсаторы ёмкостью C_1 = 2 мкФ и C_2 = 5 мкФ заряжены до напряжений U_1 = 100 В и U_2 = 150 В, соответственно. Определить напряжение на обкладках конденсаторов после их параллельного соединения обкладками, имеющими разноименные заряды. Как изменится это напряжение, если из второго конденсатора удалить пластинку диэлектрика, диэлектрическая проницаемость которого ε = 2,5?

223. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого 2 см, заряжен до напряжения 3000 В. Какова будет напряжённость поля конденсатора, если, не отключая источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния 5 см? Вычислить энергию конденсатора до и после раздвижения пластин. Площадь каждой пластины 100 см^2.

224. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между пластинами которого 2 см, заряжен до напряжения 3000 В. Какова будет напряжённость поля конденсатора, если, после отключения источника напряжения, пластины раздвинуть до расстояния 5 см? Вычислить энергию конденсатора до и после раздвижения пластин. Площадь каждой пластины 100 см^2.

225. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком и на его пластины подана некоторая разность потенциалов. Его энергия при этом равна $2 \cdot 10^{-5}$ Дж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора, при этом была совершена работа, равная $7 \cdot 10^{-5}$ Дж. Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

226. При увеличении напряжения, поданного на конденсатор ёмкостью 20 мкФ, в два раза энергия поля возросла на 0,3 Дж. Найти начальное значение напряжения и энергии поля.

227. Три одинаковых конденсатора, заполненных диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$, соединены последовательно и подключены к источнику тока с напряжением U. Во сколько раз и как изменятся электроёмкость системы и суммарная энергия электрического поля конденсаторов, если вынуть пластинку диэлектрика из одного из конденсаторов?

228. Два воздушных одинаковых конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику тока с напряжением U. Во сколько раз и как изменятся электроёмкость системы и суммарная энергия электрического поля конденсаторов, если один из них заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$.

229. Плоскому конденсатору с диэлектриком ($\varepsilon = 2$), имеющему ёмкость C_0, сообщен заряд Q_0 . При этом энергия электрического поля внутри конденсатора равна W_0. Чему будет равна ёмкость системы и суммарная энергия поля, если к этому конденсатору параллельно подсоединить точно такой же, но без диэлектрика?

230. Три одинаковых воздушных конденсатора соединены в батарею последовательно и подключены к источнику с напряжением U. Суммарный заряд батареи – Q , суммарная энергия – W. Как и во сколько раз будут отличаться заряд и энергия батареи таких же конденсаторов при их параллельном соединении, если один из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ и подключить батарею к тому же источнику?

231. В цепь постоянного тока включены последовательно медная и стальная проволоки равной длины и диаметра. Найти отношение напряжений на этих проволоках. Определить, какая часть из общего количества теплоты, выделяющегося в цепи, выделяется на каждой из этих проволок.

232. Медная и стальная проволоки равной длины и диаметра, соединённые параллельно, включены в цепь постоянного тока. Найти отношение сил токов в этих проволоках. Определить, какая часть из общего количества теплоты, выделяющегося в цепи, выделяется на каждой из этих проволок.

233. Найти внутреннее сопротивление генератора, если известно, что мощность, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова при двух значениях внешнего сопротивления $R_1 = 5$ Ом и $R_2 = 0{,}2$ Ом. Найти КПД генератора в каждом из этих случаев.

234. При силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи выделяется мощность $\mathrm{P}_1 = 18$ Вт, а при силе тока $I_2 = 1$ А – мощность $P_2 = 10$ Вт. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

235. Элемент с ЭДС в 2 В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом замкнут на внешнее сопротивление, которое изменяют от нуля до 4 Ом с шагом 0,5 Ом. Построить графики зависимости от сопротивления: 1) силы тока в цепи; 2) разности потенциалов во внешней цепи; 3) полной мощности в цепи; 4) полезной мощности, выделяемой во внешнем участке цепи. Определить КПД источника в тот момент, когда полезная мощность достигает максимального значения.

236. ЭДС батареи ε = 12 В. При силе тока I = 4 А КПД батареи η = 0,6. Определить внутреннее сопротивление батареи.

237. ЭДС батареи ε = 80 В, внутреннее сопротивление r = 5 Ом. Внешняя цепь потребляет мощность P = 100 Вт. Определить силу тока I в цепи, напряжение U, под которым находится внешняя цепь, и ее сопротивление R.

238. При внешнем сопротивлении R_1 = 8 Ом сила тока в цепи I_1= 0,8 А, при сопротивлении R_2 = 15 Ом сила тока I_2 = 0,5 А. Определить силу тока $I_{\text{к.з.}}$ короткого замыкания и ЭДС источника.

239. ЭДС батареи ε = 24 В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея, $I_{\max}$ = 10 А. Найти, при каком сопротивлении внешней цепи мощность, выделяющаяся во внешней цепи, окажется максимальной. Определить эту максимальную мощность ($P_{\max}$).

240. Две электрические лампочки с сопротивлениями R_1 = 360 Ом и R_2 = 240 Ом соединяют один раз последовательно, другой раз – параллельно и включают в цепь с напряжением U. Сравнить общие мощности, потребляемые лампочками в этих случаях, а также определить какая из лампочек потребляет большую мощность (и во сколько раз) в каждом из рассмотренных вариантов их соединения.

Магнитное поле

301. В трёх вершинах квадрата со стороной a перпендикулярно его плоскости расположены длинные прямые проводники, по которым текут токи I_1, I_2, I_3 одного направления, I_2 = 20 А, I_1 = I_3 (см. рис. 5.6). При этом индукция магнитного поля в точке A, совпа-

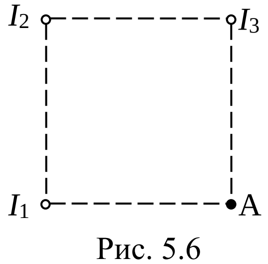

Рис. 5.6

дающей с четвертой вершиной квадрата, $B = 11{,}3 \cdot 10^{-5}$ Тл. Если изменить направление тока I_2 на противоположное, индукция поля в точке A изменится в 2 раза. Определить длину стороны квадрата и силу токов I_1 и I_3.

302. В трёх вершинах квадрата со стороной $a = 0{,}3$ м перпендикулярно его плоскости расположены длинные прямые проводники, по которым текут токи I_1, I_2, I_3 Токи I_1 и I_3 имеют одинаковое направление и $I_1 = I_3 = 5$ А. Определить силу тока I_2 и индукцию магнитного поля в точке A, совпадающей с четвёртой вершиной квадрата, если известно, что при изменении направления тока I_2 на противоположное, индукция поля в точке A изменяется в 3 раза.

303. По трем длинным параллельным проводам, находящимся на одинаковых расстояниях $d = 0{,}5$ м друг от друга текут токи $I_1 = I_2$, совпадающие по направлению, и ток $I_3 = 200$ А противоположного направления. Индукция магнитного поля, создаваемого токами I_1 и I_2 в том месте, где расположен третий проводник, равна $B = 1{,}73 \cdot 10^{-4}$ Тл. Определить направление и числовое значение силы, действующей на каждый метр длины третьего проводника, и силу тока I_2 .

304. В трёх вершинах квадрата, длина стороны которого $a = 0{,}2$ м, перпендикулярно его плоскости расположены длинные прямые проводники, по которым текут токи I_1, I_2, I_3, причём $I_1 = I_3 = 10$ А, $I_2 = 20$ А. Направления токов I_1 и I_2 совпадают, а ток I_3 течёт в противоположном направлении. Определить индукцию магнитного поля в точке A, совпадающей с четвёртой вершиной квадрата. Во сколько раз изменится индукция поля в этой точке, если изменить направление тока I_2 на противоположное?

305. Два бесконечно длинных прямых проводника скрещены под прямым углом. По ним текут токи силой $I_1 = 100$ А и $I_2 = 50$ А. Расстояние между проводниками $d = 20$ см. Определить индукцию магнитного поля в точке, лежащей на середине общего перпендикуляра к проводникам.

306. Компас помещён внутрь проволочного витка радиусом R = 25 см, который расположен в вертикальной плоскости так, что центр витка совпадает с осью магнитной стрелки компаса, а сама стрелка расположена вдоль горизонтального диаметра витка. На какой угол отклонится магнитная стрелка компаса, если по витку пропустить ток силой I = 15 А? Горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли принять равной 20 мкТл.

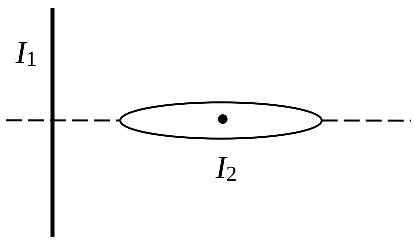

Рис. 5.7

307. Длинный прямой проводник и круговой виток расположены в перпендикулярных плоскостях (см. рис. 5.7). По этим проводникам текут токи $I_1 = I_2$ = 6 А. Радиус витка равен 3 см, а расстояние от прямого провода до центра витка равно 6 см. Как и во сколько раз изменится индукция магнитного поля в центре витка, если его повернуть на 90° вокруг горизонтального диаметра. Направления токов в проводниках и направление поворота витка выбрать произвольно.

308. Бесконечно длинный провод образует круговую петлю, касательную к проводу. По проводу течёт ток силой 5 А. Найти радиус петли, если известно, что индукция магнитного поля в центре витка равна 51,5 мкТл.

309. По длинному вертикальному проводнику сверху вниз идёт ток I = 8 А. На каком расстоянии от него индукция поля, получающаяся от сложения магнитного поля Земли и поля тока, направлена вертикально вверх? Горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли принять равной 20 мкТл.

310. Ток I_1 = 3,77 А течёт по длинному прямому проводу, расположенному вертикально, ток I_2 = 2 А – по круговому витку радиусом 3 см (рис. 5.8). Как и во сколько раз изменится индукция магнитного поля в центре витка, если его повернуть на 90° вокруг горизонтального диаметра. Расстояние от провода до центра витка – 6 см. Направления токов в проводниках и направление поворота витка выбрать произвольно.

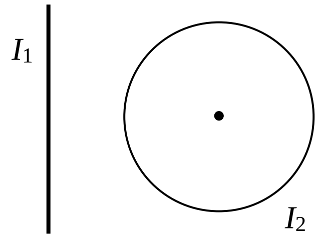

Рис. 5.8

311. Виток диаметром d = 0,2 м, в котором поддерживается постоянная сила тока I = 10 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией B. При повороте витка относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол $\alpha = 60^{\circ}$ совершается работа A = 0,8 мДж. Определить индукцию магнитного поля.

312. Квадратная рамка со стороной a = 4 см подвешена на проволоке так, что линии индукции однородного магнитного поля составляют угол 90° с нормалью к плоскости рамки. Магнитная индукция поля B = 0,8 мТл. По рамке пропускают ток, при этом рамка поворачивается на угол $\varphi = 60^{\circ}$ и совершается работа A = 5 мкДж. Определить силу тока I, текущего по рамке.

313. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,5 Тл находится плоский контур площадью S = 180 см^2. Плоскость контура расположена под углом α к линиям индукции. Поддерживая в контуре постоянную силу тока I = 60 А, его переносят в область пространства, где поле отсутствует, при этом совершается работа A = 0,27 Дж. Определить угол α.

314. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две её стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи силой I = 200 А. Определить силу, действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии, равном её длине.

315. Прямой провод длиной 40 см, по которому течёт ток силой 100 А, движется в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,5 Тл.

Какую работу A совершают силы, действующие на провод со стороны поля, перемещая его на расстояние S = 40 см, если направление перемещения перпендикулярно линиям индукции и проводу?

316. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл находится прямой проводник длиной d = 15 см, по которому течёт ток I = 5 А. На проводник действует сила F = 0,13 Н. Определите угол α между направлениями тока и вектором магнитной индукции.

317. В однородном магнитном поле с индукцией B = 2 Тл находится прямой проводник. Определить силу F, действующую на единицу длины проводника, если по нему течёт ток силой 100 А, а угол между направлением тока и вектором магнитной индукции равен 60°.

318. Плоский контур, площадь которого равна 300 см^2, находится в однородном магнитном поле с индукцией В = 0,01 Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный ток I = 10 А. Определить работу внешних сил по перемещению контура в область пространства, магнитное поле в которой отсутствует.

319. По проводу, согнутому в виде квадрата со стороной a = 10 см, течёт ток силой I = 20 А. Плоскость квадрата составляет угол α = 20° с линиями магнитной индукции однородного поля, индукция которого B = 0,1 Тл. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить провод за пределы поля, если сила тока в нём поддерживается постоянной.

320. Виток диаметром d = 20 см, в котором поддерживается постоянная сила тока I = 10 А, свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией B = 5 мТл. Сравнить работы, совершаемые внешними силами при повороте витка относительно оси, совпадающей с диаметром витка, на угол α_1 = 90° и на угол α_2 = 180°.

321. Электрон влетает в область однородного магнитного поля со скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с перпендикулярно линиям магнитной индукции. Индукция магнитного поля $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл. Какой путь он пройдёт к тому моменту времени, когда вектор его скорости повернётся на угол $\alpha = 2^{\circ}$?

322. Электрон движется по окружности радиусом $R = 1$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждено электрическое поле напряжённостью $E = 1$ В/см. Вычислить промежуток времени Δt, в течение которого должно действовать электрическое поле, для того, чтобы кинетическая энергия электрона возросла вдвое.

323. Перпендикулярно магнитному полю с индукцией $B = 0{,}1$ Тл возбуждено электрическое поле напряжённостью $E = 1000$ В/см. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость частицы υ. Определить время, за которое частица совершит полный оборот, двигаясь по окружности в магнитном поле, если электрическое поле выключить. Частица – протон.

324. Перпендикулярно однородному магнитному полю ($B = 1$ мТл) возбуждено однородное электрическое поле ($E = 1$ кВ/м). Перпендикулярно полям влетает α – частица со скоростью $\upsilon = 10^6$ м/с. Определить ускорение α – частицы в момент её вхождения в поле. Масса покоя α – частицы $m_{\alpha} = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл. Векторы υ, E и B образуют правую тройку.

325. Протон влетел в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60°$ к направлению линий поля и движется по спирали, радиус которой $R = 2{,}5$ см. Индукция магнитного поля $B = 0{,}05$ Тл. Найти кинетическую энергию протона.

326. Магнитное поле, индукция которого $B = 0{,}5$ мТл, направлено перпендикулярно к электрическому полю, напряжённость которого

E = 1 кВ/м. Пучок электронов движется в электромагнитное поле, причём скорость υ электронов перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы E и B. Найти скорость электронов υ, если при одновременном действии обоих полей пучок электронов не испытывает отклонения. Какой будет радиус R траектории движения электронов при условии включения одного магнитного поля?

327. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 10^4$ В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое (E = 100 В/см) и магнитное (B = 0,1 Тл) поля. Найти отношение заряда частицы к ее массе, если двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не отклоняется от прямолинейной траектории.

328. В однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции влетают протон и α-частица. Сравнить радиусы окружностей, по которым движутся эти частицы, и периоды их обращения в двух случаях:

1) частицы имеют одинаковую кинетическую энергию;

2) частицы имеют одинаковые импульсы.

329. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10^{-4}$ Тл по винтовой линии. Чему равна скорость υ электрона, если шаг винтовой линии h = 20 см, а радиус R = 5 см?

330. Протон влетает со скоростью $\upsilon = 10^5$ м/с в область пространства, занятую электрическим (E = 210 В/м) и магнитным (B = 3,3 мТл) полями, совпадающими по направлению. Определить для начального момента движения в поле ускорение протона, если направление скорости υ перпендикулярно направлению полей.

331. Самолёт летит со скоростью υ = 950 км/час. Найти ЭДС индукции, возникающую на концах крыльев самолёта, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ Тл, а размах крыльев самолёта – 12,5 м.

332. В магнитном поле, индукция которого равна 50 мкТл вращается стержень длиной 1 м с постоянной угловой скоростью ω = 20 рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна линиям индукции. Найти ЭДС индукции, возникающую на концах стержня.

333. На соленоид длиной l = 144 см и диаметром D = 5 см надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет N = 200 витков, и по ней течёт I = 2 А. Какая средняя ЭДС индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени t = 2 с?

334. В однородном магнитном поле с индукцией B = 0,35 Тл равномерно с частотой n = 480 мин$^{-1}$ вращается рамка, содержащая N = 5000 витков площадью S = 50 см^2 . Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции $E_{i\ max}$, возникающую в рамке. Изобразить графики зависимости от времени потока магнитной индукции через площадь, ограниченную рамкой, и возникающей в рамке ЭДС индукции.

335. Проволочный виток площадью S = 1 м^2 расположен перпендикулярно магнитному полю, индукция которого изменяется по закону B = 0,5(1+ e^{-t}) Тл. Определить значение ЭДС индукции в витке через 2 с после включения магнитного поля.

336. Проволочный виток радиусом r = 4 см, имеющий сопротивление R = 0,01 Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,04 Тл. Плоскость витка составляет угол α = 30° с линиями индукции поля. Какое количество электричества q протечёт по витку, если магнитное поле исчезнет?

337. Проволочная рамка, имеющая площадь S = 40 см^2 и сопротивление R = 2 Ом, находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого составляют угол α = 45° с нормалью к плоскости рамки. Индукция магнитного поля изменяется с течением времени по закону: B = (2t^2+3)10^{-3} Тл. Определить ЭДС индукции и силу тока, возникающего в рамке в момент времени t_1= 10 с.

338. Между полюсами электромагнита помещена катушка, соединенная с баллистическим гальванометром. Ось катушки параллельна линиям индукции. Катушка сопротивлением R_1 = 4 Ом имеет N = 15 витков площадью S = 2 см^2. Сопротивление R_2 гальванометра равно 46 Ом. Когда ток в обмотке электромагнита выключили, по цепи гальванометра протекло количество электричества q = 90 мкКл. Вычислить магнитную индукцию B поля электромагнита.

339. Рамка из провода сопротивлением R = 0,01 Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B = 0,05 Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь S рамки равна 100 см^2. Найти, какое количество электричества q протечёт через рамку за время поворота её на угол α = 30° в следующих случаях:

1) от α_0 =0° до α_1 = 30°;

2) от α_2 =60° до α_3 = 90°.

Изобразить примерный график изменения магнитного потока с течением времени и пояснить с помощью этого графика, почему в рассмотренных случаях получились не одинаковые ответы, хотя изменение угла α в обоих случаях одинаково.

340. Проволочная рамка, имеющая площадь S = 40 см^2 и сопротивление R = 0,5 Ом, находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого составляют угол $\alpha = \frac{\pi}{9}$ с нормалью к плоскости рамки. Индукция магнитного поля изменяется с течением времени по закону B = 0,5t^2 Тл. В момент времени t_1 ЭДС индукции в рамке равна 18,8 мВ. Определить t_1 и силу тока в рамке в этот момент времени.

Термодинамика

401. Баллон объёмом V = 20 л заполнен азотом при температуре T = 400 К. Когда часть газа израсходовали, давление в баллоне понизилось на Δp = 200 кПа. Определить массу m израсходованного газа. Процесс считать изотермическим.

402. В цилиндр длиной l = 1,6 м, заполненный воздухом при нормальном атмосферном давлении p_0, начали медленно вдвигать поршень площадью основания S = 200 см^2. Определить силу F, действующую на поршень, если его остановить на расстоянии l_1 = 10 см от дна цилиндра.

403. В баллоне находится газ при температуре T_1 = 400 К. До какой температуры T_2 надо нагреть газ, чтобы его давление увеличилось на 40 %?

404. Два сосуда, имеющие объём V_1 = 3 л и V_2 = 5 л, соответственно, наполнены воздухом под давлением p_1 = 0,8 МПа и p_2 = 0,6 МПа. Сосуды соединены трубкой, объёмом которой можно пренебречь по сравнению с объёмами сосудов. Найти установившееся давление в сосудах, если температура воздуха в них была одинакова и после установления равновесия не изменилась.

405. Внутри плотно закупоренной бутылки находится гелий при температуре T_1 = 350 К и давлении p_1, равном атмосферному. До какой температуры нагрелся газ, если при давлении p_2 = 150 кПа пробка вылетела? С какой силой газ давил на пробку в момент её вылета? Сечение пробки S = 3,5 см^2.

406. При нагревании газа на ΔT = 1 К, находящегося в закрытом баллоне, его давление увеличилось на 0,5 % от первоначального. Какой была начальная температура газа?

407. В баллон ёмкостью V = 12 л поместили азот массой m = 1,6 кг при температуре T_1 = 400 К. Какое давление будет создавать азот в баллоне при температуре T_2 = 150 К, если 45 % газа будет выпущено? Каково было начальное давление?

408. В сосуде вместимостью V = 40 л находится кислород при температуре T = 300 К и давлении p_1 = 0,3 МПа. Когда было израсходовано m = 50 г газа, давление в баллоне понизилось. Определить конечное давление кислорода. Процесс считать изотермическим.

409. В баллоне объемом V= 15 л находится аргон под давлением p_1 = 600 кПа и при температуре T_1 = 300 К. Когда из баллона было взято некоторое количество газа, температура в баллоне понизилась на 40 К, а давление стало p_2 = 400 кПа. Определить массу m аргона, взятого из баллона.

410. Определить молярную массу газа, если при температуре T = 154 К и давлении p = 2,8 МПа он имеет плотность ρ = 61,2 кг/м^3.

411. Углекислый газ находится при температуре T = 300 К. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$ вращательного движения одной молекулы, а также суммарную кинетическую энергию $E_к$ всех молекул углекислого газа, если количество газа ν = 2,5 моль.

412. Определить внутреннюю энергию водорода, а также среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ молекулы этого газа при температуре T = 400 К, если количество вещества ν этого газа равно 0,65 моль.

413. Определить суммарную кинетическую энергию $E_к$ поступательного движения всех молекул газа, находящегося в сосуде объёмом V = 1,2 л под давлением p = 750 кПа.

414. Определить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ одной молекулы водяного пара при температуре t = 14 °С.

415. Количество вещества гелия ν = 1,5 моль, температура T = 320 К. Определить суммарную кинетическую энергию $E_к$ поступательного движения всех молекул этого газа.

416. Молярная внутренняя энергия U_m некоторого двухатомного газа равна 3,01 кДж/моль. Определить среднюю кинетическую энергию вращательного движения $\langle\varepsilon_{вр}\rangle$ одной молекулы этого газа. Газ считать идеальным.

417. В азоте взвешены мельчайшие пылинки, которые движутся так, как если бы они были очень крупными молекулами. Масса каждой пылинки m_0 = 4·10^{-10} г. Газ находится при температуре T = *300 К*. Определить средние квадратичные скорости $\langle \upsilon_{кв} \rangle$, а также средние кинетические энергии поступательного движения $\langle \varepsilon_n \rangle$ молекулы азота и пылинки.

418. Определить среднюю квадратичную скорость $\langle \upsilon_{кв} \rangle$ молекулы газа, заключённого в сосуд вместимостью V = 2 л под давлением p = 500 кПа. Масса газа m = 0,5 г.

419. При какой температуре средняя кинетическая энергия поступательного движения $\langle \varepsilon_n \rangle$ молекулы газа равна $6{,}21 \cdot 10^{-21}$ Дж?

420. Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения $\langle \varepsilon_n \rangle$ и вращательного движения $\langle \varepsilon_{вр} \rangle$ молекулы кислорода при температуре T = 1 кК. Определить также полную кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ молекулы при тех же условиях.

421. Трёхатомный газ в количестве ν = 1,2 моль, переходя из состояния A в состояние C по пути ABC (см. рис. 5.9), расширился вдвое по сравнению с первоначальным объёмом. Какое количество теплоты Q необходимо газу для такого перехода, если в состоянии A он имел температуру T_1 = 300 К?

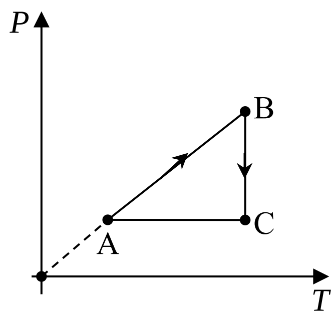

Рис. 5.9

422. Водород массой m = 20 г, занимая объём V_1 = *5 л*, имел температуру T_1 = *200 К*. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу для его перехода из состояния A в состояние B путем ACB (см. рис. 5.10), если в результате такого перехода давление газа уменьшилось на Δp = 2,2 МПа?

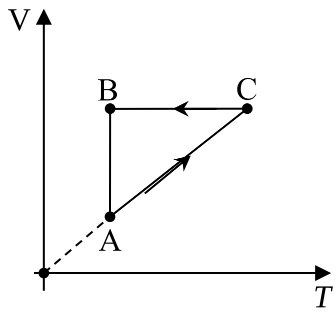

Рис. 5.10

423. Двухатомный газ нагревался при постоянном давлении, причём ему было сообщено количество теплоты, равное 35 кДж. Определить работу A, которую совершил при этом газ, и изменение его внутренней энергии ΔU.

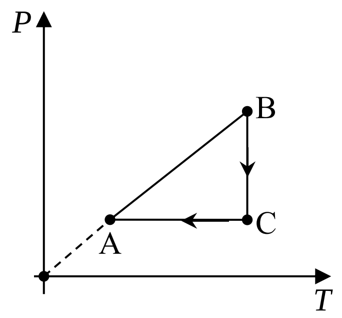

Рис. 5.11

424. Хлор массой m = 70 г переходит из состояния B в состояние A в направлении BCA (см. рис. 5.11), при этом в состоянии C его давление оказалось в три раза меньше по сравнению с первоначальным. Какое количество теплоты Q потребовалось газу для такого перехода, если первоначально хлор имел температуру $T_1 = 450$ К?

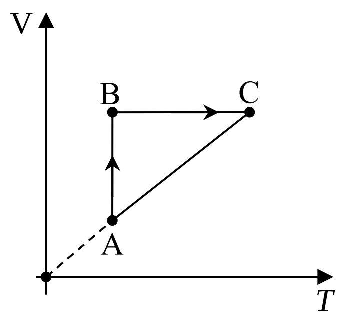

Рис. 5.12

425. Газ в количестве ν = 0,5 моль, получив тепло Q = 5,3 кДж, перешёл из состояния A в состояние C по пути ABC (см. рис. 5.12). Какова молярная теплоёмкость C_V газа при постоянном объёме, если в результате такого перехода его объём возрос в два раза, а температура T_1 в состоянии A была равна 400 К?

426. Сколько процентов от количества теплоты Q, подводимого к идеальному газу при изобарном процессе, расходуется на работу A расширения, и сколько процентов – на увеличение ΔU внутренней энергии газа? Рассмотреть два случая, если газ: 1) одноатомный; 2) трёхатомный.

427. Двухатомный газ занимает объём V_1 = 100 л и находится под давлением p_1 = 200 кПа. При нагревании газ расширился при постоянном давлении до объёма V_2 = 300 л, а затем его давление возросло до p_3 = 500 кПа при неизменном объёме. Найти изменение внутренней энергии ΔU газа, совершённую газом работу A и теплоту Q, переданную газу. Построить график процесса.

428. Какая доля ω_1 количества теплоты Q, подводимого к идеальному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение ΔU внутренней энергии газа и какая доля ω_2 – на работу A расширения? Рассмотреть два случая, если газ: 1) двухатомный; 2) трёхатомный.

429. Некоторое количество кислород а в состоянии A (см. рис. 5.13) занимает объём V_1 = 3 л при температуре t_1 = 27°С и давлении $p_1 = 8{,}2 \cdot 10^5$ Па. Найти количество тепла Q, полученное газом и работу A расширения газа при его переводе из состояния A в состояние B путем ACB, если в состоянии B кислород имел следующие параметры: V_3 = 4,5 л и $p_3 = 6 \cdot 10^5$ Па.

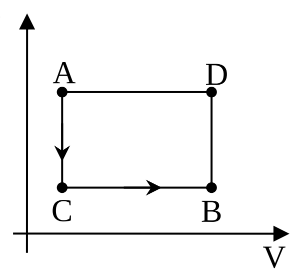

Рис. 5.13

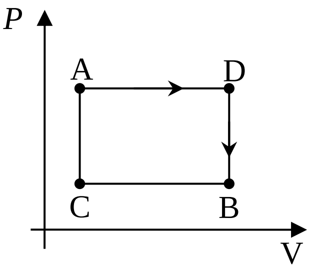

Рис. 5.14

430. Азот, находясь в состоянии A (см. рис. 5.14), занимает объём V_1 = 3 л при температуре t_1 = 27 °С и давлении $p_1 = 8{,}2 \cdot 10^5$ Па. Определить количество тепла Q, полученное газом и изменение внутренней энергии ΔU азота при его переходе из состояния A в состояние B путем ADB, если в состоянии B газ имел следующие параметры: V_3 = 4,5 л и $p_3 = 6 \cdot 10^5$ Па.

431. Количество теплоты, переданное холодильнику на 35 % больше полезной работы. Определите КПД идеальной тепловой машины. Во сколько раз температура холодильника ниже температуры нагревателя?

432. Определить работу A_2 изотермического сжатия газа, совершающего цикл Карно, коэффициент полезного действия которого η = 0,36, если работа изотермического расширения A_1 = 8,8 Дж. Во сколько раз температура нагревателя выше температуры холодильника?

433. Полезная работа идеальной тепловой машины на 35 % больше количества теплоты, отданного холодильнику. Определите КПД тепловой машины и температуру нагревателя, если температура холодильника 0 °С.

434. Температура нагревателя в 3 раза выше температуры холодильника. Во сколько раз количество теплоты, полученное от нагревателя, больше, чем полезная работа? На сколько процентов изменится КПД идеальной тепловой машины, если, не меняя температуру нагревателя, понизить температуру холодильника в два раза?

435. Количество теплоты, отданное холодильнику, составляет 35 % от полезной работы. Определите КПД идеальной тепловой машины. Во сколько раз температура нагревателя выше температуры холодильника?

436. Газ, совершающий цикл Карно, отдал теплоприёмнику теплоту Q_2 = 15 кДж. Определить температуру T_1 теплоотдатчика, если при температуре теплоприёмника T_2 = 320 К работа цикла A = 8 кДж.

437. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура T_1 теплоотдатчика в три раза (n = 3) больше температуры теплоприёмника. Какую долю w количества теплоты, полученного за один цикл от теплоотдатчика, газ отдаст теплоприёмнику?

438. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя T_1 = 700 К, температура холодильника T_2 = 350 К. Определить коэффициент полезного действия η цикла, а также работу A_1 рабочего вещества при изотермическом расширении, если холодильнику было передано количество теплоты Q_2 = 170 Дж.

439. Газ, совершающий цикл Карно, отдал теплоприёмнику 76 % теплоты, полученной от теплоотдатчика. Определить температуру T_2 теплоприемника, если температура теплоотдатчика T_1 = 480 К.

440. КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, составляет 64 %. Какую часть от полезной работы составляет количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику? На сколько процентов температура нагревателя выше, чем температура холодильника?

Заключение

Учебный процесс студента по большей части является процессом самообразования, и в силу этого обстоятельства должен быть поддержан учебно-методическими пособиями, позволяющими студенту самостоятельно справляться с большим объёмом информации.

Именно поэтому обязательными элементами учебного материала каждого из разделов являются понятийный аппарат и основные законы, необходимые для полного описания физических явлений рассматриваемых в разделе. Это позволяет студенту сосредоточить свое внимание на тех понятиях и законах, которые необходимы при решении контрольной работы по указанной теме. Предложенные в учебном пособии примеры решения задач выполняют своеобразную роль «самоучителя», давая возможность студенту разобраться в конкретной задачной ситуации и, кроме того, эти примеры служат образцом правильного оформления контрольных заданий. Авторы считают важным включить в учебное пособие справочные материалы, позволяющие студенту оперативно работать с физическими константами и коэффициентами при расчёте физических величин.

Практика решения задач, полученная в результате выполнения контрольных работ, облегчает процесс усвоения знаний, тем самым раздвигает границы возможностей сохранения в памяти большего объёма информации. Вместе с тем, овладение понятиями и законами физики обеспечивает возможность правильного понимания многих явлений и процессов в природе и технике.

Библиографический список

1. Дмитриева, В. Ф. Основы физики: учеб. пособие / В. Ф. Дмитриева, В. Л. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Высшая школа, 2001. – 527 с.

2. Кирик, Л. А. Задачи по физике для профильной школы с примерами решений / Л. А. Кирик, Л. Э. Генденштейн, И. М. Гельфгат; под ред. В. А. Орлова. – Москва: ИЛЕКСА, 2012. – 416 с.

3. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 1: Механика. Молекулярная физика: учеб. пособие / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 432 с.

4. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 2: Электричество и магнитизм. Волны. Оптика: учеб. пособие / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 496 с.

5. Савченко, Н. Д. Физические основы классической механики: учеб. пособие / Н. Д. Савченко. – Чита: ЧитГУ, 2004. – 124 с.

6. Свешников, И. В. Электромагнитное поле: учеб. пособие / И. В. Свешников, Т. В. Кузьмина. – Чита: ЗабГУ, 2012. – 200 с.

7. Трофимова, Т. И. Курс физики : учеб. пособие / Т. И. Трофимова. – Москва: Высшая школа, 2007. – 560 с.

8. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения: учеб. пособие / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. – Москва: Академия, 2009. – 592 с.

9. Трофимова, Т. И. Краткий курс физики с примерами решения задач: учеб. пособие / Т. И. Трофимова. – Москва: Кнорус, 2007. – 280 с.

10. Фриш, С.Э. Курс общей физики. Т. 1: Физические основы механики. Молекулярная физика. Колебания и волны: учебник / С. Э. Фриш, А. В. Тиморева. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 480 с.

Приложение

Приложение А

Таблица А1

Физические постоянные

Физические постоянные	***Обозначение***	***Значение***
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг с^2)
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	8,31 Дж/(моль К)
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	V_m	$22{,}4\cdot10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К
Атомная единица массы	*а.е.м.*	$1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Масса электрона	m_e	$9{,}11\cdot10^{-31}$ кг
Масса протона	m_p	$1{,}66\cdot10^{-27}$ кг
Масса α-частицы	m	$6{,}64\cdot10^{-27}$ кг
Элементарный заряд	e	$1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$12{,}56\cdot10^{-7}$ Гн/м
Скорость света в вакууме	c	$3{,}00\cdot10^{8}$ м/с

Таблица А2

Астрономические величины

Наименование	***Значение***
Радиус Земли	$6{,}37\cdot10^{6}$ м
Радиус Солнца	$6{,}95\cdot10^{24}$ м
Радиус Луны	$1{,}74\cdot10^{6}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49\cdot10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84\cdot10^{8}$ м
Масса Земли	$5{,}98\cdot10^{24}$ кг
Масса Солнца	$1{,}98\cdot10^{30}$ кг
Масса Луны	$7{,}33\cdot10^{22}$ кг

Таблица А3

Плотность твёрдых тел

Вещество	***Плотность, кг/м³***	***Вещество***	***Плотность, кг/м³***
Алюминий	$2{,}70 \cdot 10^3$	Медь	$8{,}93 \cdot 10^3$
Барий	$3{,}50 \cdot 10^3$	Никель	$8{,}90 \cdot 10^3$
Ванадий	$6{,}02 \cdot 10^3$	Свинец	$11{,}3 \cdot 10^3$
Висмут	$9{,}80 \cdot 10^3$	Серебро	$10{,}5 \cdot 10^3$
Железо	$7{,}88 \cdot 10^3$	Цезий	$1{,}90 \cdot 10^3$
Литий	$0{,}53 \cdot 10^3$	Цинк	$7{,}15 \cdot 10^3$

Таблица А4

Плотность жидкостей

Вещество	***Плотность, кг/м³***	***Вещество***	***Плотность, кг/м³***
Вода (t = 4 °C)	$1{,}00 \cdot 10^3$	Сероуглерод	$1{,}26 \cdot 10^3$
Глицерин	$1{,}26 \cdot 10^3$	Скипидар	$0{,}86 \cdot 10^3$
Ртуть	$13{,}6 \cdot 10^3$	Спирт	$0{,}80 \cdot 10^3$

Таблица А5

Плотность газов (при нормальных условиях)

Вещество	***Плотность, кг/м³***	***Вещество***	***Плотность, кг/м³***
Азот	1,25	Гелий	0,18
Водород	0,09	Кислород	1,41
Воздух	1,29	Неон	0,90

Таблица А6

Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей

Жидкость	***Коэффициент, Н/м***	***Жидкость***	***Коэффициент, Н/м***
Вода	$72 \cdot 10^{-3}$	Ртуть	$500 \cdot 10^{-3}$
Мыльная пена	$40 \cdot 10^{-3}$	Спирт	$22 \cdot 10^{-3}$

Таблица А7

Эффективный диаметр молекулы

Газ	*Диаметр, м*	*Газ*	*Диаметр, м*
Азот	$3{,}0\cdot10^{-10}$	Гелий	$1{,}9\cdot10^{-10}$
Аргон	$3{,}5\cdot10^{-10}$	Кислород	$2{,}7\cdot10^{-10}$
Водород	$2{,}3\cdot10^{-10}$	Хлор	$3{,}7\cdot10^{-10}$

Таблица А8

Диэлектрическая проницаемость

Вещество	*Проницаемость*	*Вещество*	*Проницаемость*
Вода	81,0	Парафин	2,0
Масло трансформаторное	2,2	Стекло	7,0
Алмаз, С	5,7	Слюда	7,0
Винипласт	3,5	Текстолит	7,0
Воск	7,8	Рутил, TiO_2 (вдоль оптической оси)	170
Каменная соль, NaCI	6,3	Эбонит	2,6
Кварц, SiO_2	4,3	Титанат бария, $BaTiO_3$ (при 20 °С перпендикулярно оптической оси)	4000
Керосин	2,0	Фарфор	6,0

Таблица А9

Удельное сопротивление металлов

Металл	*Удельное сопротивление, Ом·м*	*Металл*	*Удельное сопротивление, Ом·м*
Железо	$9{,}8\cdot10^{-8}$	Нихром	$1{,}1\cdot10^{-6}$
Медь	$1{,}7\cdot10^{-8}$	Серебро	$1{,}6\cdot10^{-8}$

Таблица А10

Относительные атомные массы A_r и порядковые номера Z некоторых элементов

Элемент	*Символ*	A_r	Z	*Элемент*	*Символ*	A_r	Z
Азот	N	14	7	Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13	Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молибден	Mo	96	42
Барий	Ba	137	56	Натрий	Na	23	11
Ванадий	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водород	H	1	1	Никель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелий	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Железо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сера	S	32	16
Калий	K	39	19	Серебро	Ag	108	47
Кальций	Ca	40	20	Углерод	C	12	6
Кислород	O	16	8	Уран	U	238	92
Магний	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

Таблица А11

Механические, термодинамические, электрические единицы СИ, имеющие специальные наименования

Название величины	*Размерность*	*Единицы измерения*	*Обозна-чение*	*Выражение через основные и дополнительные единицы*
Основные единицы				
Длина	L	метр	м	
Масса	M	килограмм	кг	
Время	T	секунда	с	
Сила электрического тока	I	ампер	А	
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	К	
Количество вещества	N	моль	моль	
Дополнительные единицы				
Плоский угол	-	радиан	рад	
Телесный угол	-	стерадиан	ср	
Производные единицы				
Частота	T^{-1}	герц	Гц	$с^{-1}$
Сила, вес	LMT^{-2}	ньютон	Н	$м\cdot кг\cdot с^{-2}$

Давление, механическое напряжение	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	$м^{-1}·кг·с^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	$L^{2}MT^{-2}$	джоуль	Дж	$м^{2}·кг·с^{-2}$
Мощность, поток энергии	$L^{2}MT^{-3}$	ватт	*Вт*	$м^{2}·кг·с^{-3}$
Электрический заряд (количество электричества)	TI	кулон	*Кл*	с·А
Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^{2}MT^{-3}I^{-1}$	вольт	*В*	$м^{2}·кг·с^{-3}·А^{-1}$
Электрическая ёмкость	$L^{-2}M^{-1}T^{4}I^{2}$	фарад	Ф	$м^{-2}·кг^{-1}·с^{4}·А^{2}$
Электрическое сопротивление	$L^{2}MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	$м^{2}·кг·с^{-3}·А^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^{3}I^{2}$	сименс	См	$м^{-2}·кг^{-1}·с^{3}·А^{2}$
Магнитный поток	L2MT-2I-1	вебер	Вб	м2·кг·с-2·А-1
Магнитная индукция	MT-2I-1	тесла	Тл	кг·с-2·А-1
Индуктивность, взаимная индуктивность	L2MT-2I-2	генри	Гн	м2·кг·с-2·А-2

Таблица А12

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка		***Множитель***	***Приставка***		***Множитель***
Наименование	***Обозначение***		***Наименование***	***Обозначение***	
Экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
Пэта	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
Тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
Гига	Г	10^{9}	микро	мк	10^{-6}
Мега	М	10^{6}	нано	н	10^{-9}
Кило	к	10^{3}	пико	п	10^{-12}
Гекто	г	10^{2}	фемто	ф	10^{-15}
Дека	да	10^{1}	атто	а	10^{-18}

Таблица А13

Греческий алфавит

Обозначения букв	***Название букв***	***Обозначения букв***	***Название букв***
A, α	альфа	N, ν	Ню
B, β	бета	Ξ, ξ	Кси
Γ, γ	гамма	O, o	Омикрон
Δ, δ	дэльта	Π, π	Пи
E, ε	эпсилон	P, ρ	Ро
Z, ς	дзета	Σ, σ	Сигма
H, η	эта	T, τ	Тау
Θ, ϑ	тэта	Υ, υ	Ипсилон
I, ι	иота	Φ, φ	Фи
K, κ	каппа	X, χ	Хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
M, μ	мю	Ω, ω	Омега

У ч е б н о е   и з д а н и е

Савченко Нина Дмитриевна
Кузьмина Татьяна Витальевна
Рахлецова Татьяна Викторовна

ОСНОВЫ ФИЗИКИ

Часть 1
Механика. Электродинамика. Термодинамика

Редактор Е. В. Валюкова
Вёрстка М. Р. Коптеловой

Подписано в печать 27.12.2017.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Способ печати оперативный.
Усл. печ. л. 13,3. Уч-изд. л. 8,4. Заказ № 17287.
Тираж 100 экз. (1-й з-д 1–36).

ФГБОУ ВО «Забайкальский государственный университет»
672039, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30