

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Забайкальский государственный университет»

## **ОСНОВЫ ФИЗИКИ**

### **Часть 2**

**Физика колебаний и волн**  
**Основы квантовой механики**  
**Физика атомного ядра и элементарных частиц**

*Учебное пособие для бакалавров  
всех форм обучения*

Чита  
Забайкальский государственный университет  
2017

УДК 53(075)

ББК 22.3я7

О 751

Рекомендовано к изданию учебно-методическим советом  
Забайкальского государственного университета

### Рецензенты

**Б. А. Балаганский**, канд. физ.-мат. наук, доцент,  
Читинский институт Байкальского государственного  
университета, г. Чита

**Ю. Н. Смоляков**, канд. мед. наук, доцент, Читинская  
государственная академия, г. Чита

**Основы физики** : учеб. пособие : [в 2 ч.] / Н. Д. Сав-  
ченко, Т. В. Кузьмина, А. П. Дружинин, Т. В. Рахлецова ;  
О 751 Забайкал. гос. ун-т. – [2-е изд., испр. и доп.]. – Чита : Заб-  
ГУ, 2017.

ISBN 978-5-9293-2064-4

**Часть 2.** Физика колебаний и волн. Основы кванто-  
вой механики. Физика атомного ядра и элементарных ча-  
стиц. – 263 с.

ISBN 978-5-9293-2066-8

Учебное пособие составлено в соответствии с ФГОС ВПО  
по дисциплине «Физика» для направлений инженерно-техниче-  
ского профиля. Ориентировано на самостоятельную аудиторную  
и внеаудиторную работу по основным разделам физики.

В работе в единообразной форме формируется понятийный  
аппарат, излагаются основные законы физики. Методика исполь-  
зования этих законов рассмотрена на примерах решения типовых  
задач. Приведены задания для контрольных работ по каждому на-  
правлению подготовки бакалавров.

Издание предназначено для студентов высших технических  
учебных заведений очной, заочной и других форм обучения.

УДК 53(075)

ББК 22.3я7

ISBN 978-5-9293-2066-8 (ч. 2)

ISBN 978-5-9293-2064-4

© Забайкальский государственный  
университет, 2017

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	7
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	10
<b>Глава 1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ</b> .....	14
1.1. Общие понятия .....	14
1.2. Собственные незатухающие гармонические колебания .....	16
1.2.1. Дифференциальное уравнение и его решение .....	16
1.2.2. Понятийный аппарат: основные характеристики колебаний .....	17
1.2.3. Основные законы и соотношения при описании гармонических колебаний .....	18
1.3. Сложение гармонических колебаний .....	21
1.4. Свободные затухающие колебания .....	25
1.4.1. Дифференциальное уравнение и его решение .....	25
1.4.2. Понятийный аппарат и основные соотношения .....	26
1.5. Вынужденные колебания .....	28
1.5.1. Дифференциальное уравнение и его решение .....	28
1.5.2. Основные закономерности при вынужденных колебаниях .....	28
1.6. Переменный ток как вынужденные колебания .....	31
1.6.1. Понятийный аппарат для описания цепей переменного тока .....	31
1.6.2. Основные законы и соотношения для цепей переменного тока .....	34
1.7. Автоколебания .....	40
1.8. Примеры решения задач к разделу «Колебательные процессы» .....	41
<b>ГЛАВА 2. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ</b> .....	54
2.1. Общие понятия .....	54
2.2. Понятийный аппарат: основные характеристики волн .....	57
2.3. Некоторые особенности упругих и электромагнитных волн .....	58
2.4. Общие законы и соотношения при описании волновых процессов .....	61
2.5. Явления, возникающие при разных условиях распространения волн .....	65
2.5.1. Распространение волн в однородной среде .....	65
2.5.2. Распространение волн в неоднородной среде .....	66

2.5.3. Распространение волн при переходе из одной среды в другую .....	67
2.5.4. Интерференция волн .....	70
2.5.5. Особенности интерференции световых волн .....	74
2.5.6. Распространение волн в среде с резкими неоднородностями (при наличии ограниченных по размерам непрозрачных для волн препятствий). Явление дифракции .....	78
2.5.7. Особенности дифракции световых волн .....	79
2.5.8. Выделение колебаний одного направления в волне. Явление поляризации .....	83
2.5.9. Особенности поляризации световых волн .....	86
2.5.10. Некоторые явления, возникающие при взаимодействии света с веществом .....	90
2.6. Примеры решения задач к разделу «Волновые процессы» .....	91

### **Глава 3. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ**

#### **ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И МИКРОЧАСТИЦ ВЕЩЕСТВА .....**

3.1. Элементы квантовой оптики. Явление теплового излучения .....	108
3.1.1. Понятийный аппарат .....	108
3.1.2. Основные закономерности теплового излучения ...	110
3.1.3. Трудности волновой теории света при объяснении закономерностей теплового излучения. Гипотеза Планка .....	112
3.2. Элементы квантовой оптики. Явление внешнего фотоэффекта .....	114
3.2.1. Понятийный аппарат .....	114
3.2.2. Основные экспериментальные закономерности внешнего фотоэффекта .....	116
3.2.3. Трудности волновой теории света при объяснении закономерностей внешнего фотоэффекта. Гипотеза и уравнение Эйнштейна для фотоэффекта .....	116
3.3. Связь волновых и корпускулярных характеристик света .....	119
3.4. Волновые свойства микрочастиц вещества .....	121
3.4.1. Волновые свойства микрочастиц вещества. Экспериментальные подтверждения .....	121
3.4.2. Волновые свойства микрочастиц вещества. Понятийный аппарат. Гипотеза де Бройля .....	122

3.4.3. Волновые свойства микрочастиц вещества. Границы применимости классической механики. Соотношения неопределённостей Гейзенберга ....	125
3.5. Примеры решения задач к разделу «Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного поля и микрочастиц вещества» .....	127
<b>Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ</b> .....	143
4.1. Основной закон квантовой механики .....	144
4.1.1. Уравнение Шредингера. Частица в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме .....	145
4.1.2. Уравнение Шредингера. Частица в трёхмерном прямоугольном потенциальном ящике .....	150
4.1.3. Электрон в атоме водорода: элементы квантовой теории строения атома водорода .....	151
4.1.4. Излучение и поглощение электромагнитной энергии атомами вещества .....	159
4.2. Описание движения систем взаимодействующих частиц в квантовой механике .....	162
4.2.1. Принцип Паули. Многоэлектронные атомы .....	162
4.2.2. Элементы зонной теории проводимости кристаллов .....	165
4.2.3. Некоторые особенности проводимости полупроводников .....	170
4.2.4. Понятийный аппарат раздела о поведении систем взаимодействующих частиц в квантовой механике .....	181
4.3. Примеры решения задач к разделу «Элементы квантовой механики» .....	185
<b>Глава 5. АТОМНОЕ ЯДРО И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ</b> .....	200
5.1. Состав атомного ядра и его свойства. Ядерные силы .....	200
5.2. Энергия связи ядер. Дефект массы. Реакции деления и синтеза ядер .....	203
5.3. Радиоактивность .....	206
5.4. Основные типы радиоактивности .....	209
5.5. Элементарные частицы .....	212
5.6. Примеры решения задач к разделу «Атомное ядро и элементарные частицы» .....	222

<b>Глава 6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО</b>	
<b>РЕШЕНИЯ</b> .....	230
6.1. Требования к оформлению контрольных работ .....	230
6.2. Задания для самостоятельного решения к разделам физики .....	231
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	255
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК</b> .....	256
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ</b> .....	257

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время существует достаточное количество учебников, ориентированных на разные уровни высшего образования, и потребности в увеличении их количества нет. Данное пособие не является учебником по курсу физики. Его разработка обусловлена тремя основными причинами: переходом к компетентностной парадигме специального образования, резким падением уровня развития понятийного мышления у выпускников школ и значительным сокращением времени аудиторной работы преподавателя со студентами в учебных планах подготовки бакалавров.

Указанные причины побудили авторов пособия очертить минимальный объём и свойства конечного образовательного продукта, удовлетворяющие новым требованиям Федерального государственного стандарта (ФГОС), а также предоставить студентам эту информацию в единообразной структуре, ускоряющей поиск нужных фрагментов информации при самостоятельном выполнении контрольных заданий, при подготовке к экзаменам, зачётам, тестам и коллоквиумам.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования, главными объектами контроля и оценки становятся компетенции, которыми овладел студент в процессе обучения. При подготовке бакалавров инженерно-технического профиля изучение физики направлено на формирование междисциплинарных общекультурных и общепрофессиональных компетенций, которые можно разделить на две группы. К первой группе относятся:

- способность представлять современную картину мира на основе целостной системы естественнонаучных знаний;
- способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе изучения других дисциплин

и в профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат, грамотно использовать методы теоретического и экспериментального исследования.

Формирование этих компетенций требует, чтобы в центре внимания обучающихся находились не совокупность явлений и законов, а физические теории, имеющие чёткую структуру. В связи с этим, сохранив минимум экспериментальных фактов, лежащих в **основании** теории, в теоретической части пособия в сжатой, тезисной форме определены для каждого из изучаемых разделов курса **ядро** физической теории (которое включает идеализированные модели, понятийный аппарат и основные законы) и **следствия**, иллюстрирующие работоспособность теории при решении прикладных задач.

Вторая группа компетенций отражает уровень развития мышления обучающихся:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, критическому осмыслению, систематизации, прогнозированию, постановке целей и выбору путей их достижения;

- умение логически верно и аргументированно строить устную и письменную речь;

- способность самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности новые знания и умения, стремление к саморазвитию и самоконтролю.

Специалист с высшим образованием должен обладать развитым логическим (теоретическим) мышлением, но оно может быть сформировано только на базе понятийного мышления. Мониторинг знаний абитуриентов вузов показывает, что за последние годы произошло резкое снижение уровня развития понятийного мышления у выпускников об-



щеобразовательных школ. Ликвидация этого пробела стала актуальной задачей дисциплин общенаучного цикла в вузах, однако эта задача не подкреплена специальным временным резервом. В связи с этой проблемой авторы данного пособия особое внимание уделили формированию системы основных понятий курса физики. Для этого, в частности, в каждой теме выделен специальный раздел «Понятийный аппарат», все определения даны в единообразной форме, а в разобранных примерах решения задач акцент сделан на использовании этих определений и законов для логического обоснования каждого шага решения. Такие же требования предъявляются к самостоятельному решению контрольных задач по всем разделам курса.

Первая часть данного пособия включала учебно-методические и информационно-справочные материалы по разделам: «Основы классической механики», «Основы релятивистской механики», «Основы электродинамики», «Основы молекулярной физики и термодинамики». Во второй части будут представлены разделы: «Колебательные процессы», «Волновые процессы», «Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного поля и микрочастиц вещества», «Элементы квантовой механики», «Элементы ядерной физики и физики элементарных частиц».

## ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие предназначено для организации самостоятельной и аудиторной работы на практических занятиях по курсу физики с обучающимися по направлениям бакалавриата: 13.03.01 *Теплоэнергетика и теплотехника*, 04.03.01 *Химия*, 13.03.02 *Электроэнергетика и электротехника*, 23.03.03 *Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов*, 23.03.01 *Технология транспортных процессов*, 09.03.01 *Информатика и вычислительная техника*, 09.03.03 *Прикладная информатика*, 35.03.02 *Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств*, 08.03.01 *Строительство*, 20.03.02 *Природообустройство и водопользование*, 20.03.01 *Техносферная безопасность*.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования (ФГОС), для получения квалификации «бакалавр» по направлениям инженерно-технического профиля студенты, изучившие курс физики, должны

**знать:**

- фундаментальные понятия и теории классической и современной физики;
- основные физические явления, описывающие их законы и границы их применимости;

**уметь:**

- использовать математические методы при решении физических задач;
- анализировать влияние разных факторов на протекание физических явлений;
- проводить расчёты на основе построенных математических моделей и оценивать правдоподобность полученных результатов;

- использовать возможности вычислительной техники и программного обеспечения для поиска недостающей информации и для её обработки;

- применять полученные знания при изучении других дисциплин, выделять конкретное физическое содержание в прикладных задачах профессиональной деятельности;

***владеть:***

- первичными навыками и основными методами решения задач из разных разделов физики;

- методами выполнения лабораторного физического эксперимента и обработки экспериментальных результатов.

*Возможности, предоставляемые данным учебным пособием для достижения целей, обозначенных в ФГОС:*

1. По каждому разделу, включённому в программу курса физики, указан список рекомендованной учебной литературы. Для облегчения ориентации студентов в обширном информационном поле в пособии приведён краткий глоссарий основных понятий и законов, который удобно использовать при подготовке к экзаменам и зачётам. При этом следует обратить внимание на единообразную форму представления информации. Например, определение любой физической величины должно содержать ответы на следующие вопросы: что характеризует данная величина, какого рода информацию об изучаемом явлении она даёт; каков способ определения её численного значения (т. е. соответствующая формула и единицы измерения); каково правило для определения направления рассматриваемой величины (если величина векторная).

2. В пособии выделено ограниченное количество типовых задач, методы решения которых должны освоить студенты. По каждому типу задач приведены примеры, в которых подробно описана методика использования основных

законов для построения математической модели конкретной задачной ситуации. Эти примеры необходимо разобрать перед выполнением контрольных заданий.

3. В приложении к пособию студенты могут найти необходимые для решения задач справочные материалы, а именно: числовые значения физических констант и табличных коэффициентов, которые характеризуют физические свойства вещества (см. табл. А.1–А.10); множители и приставки для образования кратных и дольных единиц (см. табл. А.9), названия и обозначения букв греческого алфавита (см. табл. А.10).

4. Самостоятельное выполнение контрольных работ является основным средством освоения теоретического материала курса, поскольку только применение знаний обеспечивает их глубокое понимание. Поэтому рекомендуется следующий порядок работы с учебным материалом по курсу физики:

а) прочитайте задачу и выделите то физическое явление, о котором идёт речь;

б) по учебнику из списка рекомендованной литературы и понятийному аппарату, приведённому в пособии, выясните сущность явления. Выпишите и выучите основные понятия и законы, используемые при описании данного явления (полезно в отдельной тетради составить словарь терминов и законов, используемых в тексте и в решении задачи). Ответьте на контрольные вопросы, приведённые в конце каждого раздела;

в) разберите приведённые в пособии примеры решения аналогичных задач, чтобы убедиться, что методика решения понятна. Попытайтесь воспроизвести логическую последовательность основных этапов решения разобранных задач;

г) вернитесь к контрольной задаче своего варианта и выясните, что известно о частных особенностях рассматриваемого явления по условию задачи. Составьте математическую модель задачной ситуации, т. е. запишите законы с учётом конкретных условий. Проверьте полноту полученной системы уравнений и при необходимости используйте дополнительные законы или определения неизвестных величин;

д) решите полученную систему в общем виде и в числах. Попытайтесь оценить правдоподобность полученного результата.

5. Освоение методов математического моделирования простейших физических задачных ситуаций является основным критерием при оценке контрольных работ, выполняемых студентами. Представленное в контрольной работе решение должно продемонстрировать понимание студентом сущности физического явления (описанного в тексте задачи), владение понятийным аппаратом (относящимся к рассматриваемому явлению), знание основных законов (описывающих явление) и самое главное – умение обосновать особенности применения того или иного закона к условиям конкретной задачи. В связи с этим, решение должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими словесными пояснениями. В качестве образца используйте материалы глав пособия «Примеры решения задач» (см. гл. 1.8; 2.6; 3.5; 4.3; 5.6).

## Глава 1. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Колебания – это периодические изменения какого-либо параметра, характеризующего состояние системы. Например, периодические изменения *освещённости* поверхности Земли при восходе и заходе Солнца; сезонные колебания средней *температуры* при смене времен года; периодические изменения *положения* поршня и *давления* газа под поршнем в цилиндре двигателя внутреннего сгорания; колебания *напряжения* в цепи переменного тока и т. п. Колебательные процессы – это наиболее распространённые в природе, технике и в человеческом организме процессы.

### 1.1. Общие понятия

*Гармонические колебания* (идеализированная модель) – простейший вид колебаний, при котором переменный параметр  $x$  изменяется с течением времени по закону косинуса или синуса.

*Уравнение гармонических колебаний:*

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \text{ или } x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

*Условия существования гармонических колебаний:*

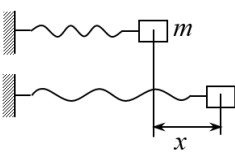
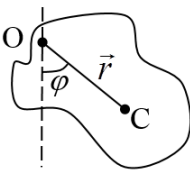
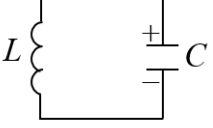
- а) наличие в системе состояния устойчивого равновесия;
- б) возникновение «квазиупругой силы», прямо пропорциональной отклонению системы от состояния равновесия и возвращающей систему в состояние равновесия;
- в) наличие инертных свойств у системы, благодаря которым колебательный процесс не прекращается в тот момент, когда система проходит через состояние равновесия.

*Основные типы колебаний:*

- собственные незатухающие колебания;
- свободные затухающие колебания;
- вынужденные незатухающие колебания;
- автоколебания.

Таблица 1.1

## Примеры простейших колебательных систем

Упругий маятник – грузик на пружине (массой которой можно пренебречь), находящийся на гладкой горизонтальной поверхности	Физический маятник – любое тело, имеющее горизонтальную ось вращения, не проходящую через центр масс	Колебательный контур – электрическая цепь, содержащая конденсатор и катушку индуктивности
		
<b>Рис. 1.1.</b>	<b>Рис. 1.2.</b>	<b>Рис. 1.3.</b>
<i>Состояние устойчивого равновесия</i>		
Пружина не деформирована ( $\sum F = 0$ )	Ось вращения и центр масс находятся на одной вертикали ( $\sum M = 0$ )	Конденсатор разряжен ( $U_c = 0$ )
<i>Параметр, характеризующий отклонение системы от состояния равновесия</i>		
$x$ – смещение груза, совпадающее с деформацией пружины	$\varphi$ – угол отклонения	$q$ – заряд конденсатора
<i>«Квазиупругая сила»</i>		
Сила упругости (при малых деформациях пружины) $F_{упр} = -k \cdot x$	Момент силы тяжести (при малых углах отклонения) $M = -mgr \cdot \varphi$	Разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_c = \frac{1}{C} \cdot q$
<i>Характеристика инертных свойств системы</i>		
$m$ – масса груза	$I$ – момент инерции тела	$L$ – индуктивность катушки

## 1.2. Собственные незатухающие гармонические колебания

Собственные незатухающие колебания – гармонические колебания, происходящие в системе под действием «квазиупругой силы» при отсутствии сопротивления.

### 1.2.1. Дифференциальное уравнение и его решение

Рассмотрим дифференциальное уравнение собственных незатухающих колебаний на примере упругого горизонтального маятника (см. рис. 1 в табл. 1.1). В направлении оси  $x$  на грузик действует единственная сила  $F_{\text{упр}} = -k \cdot x$ , которая по II закону Ньютона, создаёт ускорение  $a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m} \cdot x$ . Учитывая, что ускорение численно равно второй производной от смещения по времени  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , и вводя обозначение  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ , получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot x, \text{ или } \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0. \quad (1.1)$$

Известно, что решением данного дифференциального уравнения является гармоническая функция вида

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0), \text{ или } x = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0). \quad (1.2)$$

Полученное решение означает, что под действием упругой силы в системе возникают гармонические колебания с частотой  $\omega_0$ . С учётом введенных обозначений для упругого маятника циклическая частота  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Как видно, эта частота зависит от свойств самой системы – коэффициента жёсткости пружины и массы груза.

Уравнения вида (1.1) и (1.2) могут быть получены для любых колебательных систем, находящихся под действием квазиупругой силы. При этом переменный параметр  $x$  может иметь разный смысл в зависимости от физической природы



процессов, происходящих в колебательной системе (заряд на обкладках конденсатора в колебательном контуре, сила тока, протекающего по катушке индуктивности, угол отклонения физического маятника от положения равновесия и т. д.). Факторы, влияющие на частоту колебаний, в некоторых простых колебательных системах отражены в формулах (1.11).

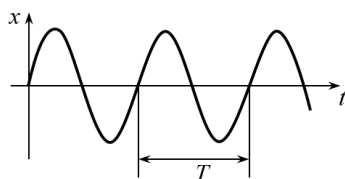


Рис. 1.4

Основным признаком гармонических колебаний, описываемых уравнением (1.2), является повторяемость значений параметра  $x$  через равные интервалы времени, что отражено на рис. 1.4.

### 1.2.2. Понятийный аппарат: основные характеристики колебаний

*Период колебаний* ( $T$ ) – величина, характеризующая периодическую повторяемость колебательного процесса во времени, численно равная промежутку времени, за который происходит полный цикл колебаний (т. е. система возвращается в исходное состояние).

*Частота колебаний (линейная)* ( $\nu$ ) – величина, характеризующая периодическую повторяемость колебательного процесса во времени, численно равная количеству полных циклов колебаний, совершаемых в единицу времени.

*Циклическая частота колебаний* ( $\omega$ ) – величина, численно равная количеству полных циклов колебаний, совершаемых за  $2\pi$  единиц времени.

*Амплитуда колебаний* ( $A = |x^{\max}|$ ) – величина, численно равная модулю максимального отклонения от состояния равновесия параметра  $x$ : в уравнении колебаний (1.2).

*Фаза колебаний* ( $\varphi = (\omega \cdot t + \varphi_0)$ ) – аргумент косинуса или синуса в уравнении колебаний, содержащий время. Эту величину иногда называют угловой мерой времени. Она характеризует состояние системы в данный момент времени по отношению к состоянию, определяемому амплитудным значением параметра  $x$ . Например, если колебания описываются функцией синуса и в некоторый момент времени  $t_1$  известно, что фаза  $\varphi_1 = (\omega_0 \cdot t_1 + \varphi_0) = \pi/6$ , то из выражения (1.2) следует  $x_1 = A \cdot \sin \pi/6 = 0,5 A$ ; при фазе  $\varphi_2 = (\omega_0 \cdot t_2 + \varphi_0) = \pi/4$  смещение  $x_2 = 0,71 A$ ; при фазе  $\varphi_3 = (\omega_0 \cdot t_3 + \varphi_0) = \pi/3$  смещение  $x_3 = 0,87 A$ .

*Начальная фаза колебаний* ( $\varphi_0$ ) – фаза колебаний при  $t = 0$ .

*Связи между параметрами колебаний:*

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad \omega = 2\pi\nu; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.3)$$

Если взять производную по времени от выражения, определяющего фазу колебаний, с учётом физического смысла производной, получим, что циклическая частота колебаний численно равна скорости изменения фазы колебаний:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1.4)$$

### ***1.2.3. Основные законы и соотношения при описании гармонических колебаний***

При существовании колебательного процесса в системе периодически могут изменяться разные параметры, например, для грузика на пружине по гармоническому закону изменяется не только его смещение от положения равновесия, но и его скорость и ускорение. В колебательном контуре изменяется заряд и напряжение на обкладках конденсатора, а также сила тока в катушке. При этом фазы колебаний раз-

ных величин могут не совпадать. Проиллюстрируем фазовые и амплитудные соотношения между параметрами системы на примере упругого маятника.

*Кинематические законы гармонических колебаний*

Предположим, что смещение меняется с течением времени по закону синуса без начальной фазы:

$$x = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t). \quad (1.5)$$

*Закон скорости* может быть найден как первая производная от закона смещения по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t), \text{ или } v = v^{\max} \sin\left(\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.6)$$

*Закон ускорения* найдётся как первая производная от закона скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t), \text{ или } a = a^{\max} \sin(\omega_0 \cdot t + \pi). \quad (1.7)$$

Сравнивая между собой законы (1.5)–(1.7), приходим к следующим выводам:

- между колебаниями смещения и скорости существует сдвиг по фазе на  $\pi/2$ ;
- между колебаниями ускорения и скорости существует сдвиг по фазе на  $\pi/2$ ;
- между колебаниями смещения и ускорения существует сдвиг по фазе на  $\pi$ ;
- амплитудное значение скорости и амплитуда смещения связаны соотношением

$$v^{\max} = A\omega_0; \quad (1.8)$$

- амплитудное значение ускорения и амплитуда смещения связаны соотношением

$$a^{\max} = A\omega_0^2; \quad (1.9)$$

- ускорение в любой момент времени пропорционально смещению и противоположно ему направлено

$$a = -\omega_0^2 \cdot x. \quad (1.10)$$

*Циклическая частота и период собственных колебаний  
в простейших колебательных системах*

$$\left. \begin{aligned} \text{Упругий маятник : } \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \text{Физический маятник : } \omega_0 &= \sqrt{\frac{mgr}{I}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgr}} \\ \text{Математический маятник : } \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}}; T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \\ \text{Колебательный контур : } \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}}; T = 2\pi \sqrt{LC} \end{aligned} \right\}. \quad (1.11)$$

Обратим внимание на то, что в случае собственных колебаний частота (и период) зависит от параметров колебательной системы (массы тела, длины нити, электроёмкости конденсатора и т. п.).

*Энергия гармонических колебаний*

Потенциальная энергия при упругих деформациях вычисляется  $W_p = \frac{kx^2}{2}$  или с учётом закона (1.5) и введённых ранее обозначений  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ :

$$W_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t). \quad (1.12)$$

Кинетическая энергия вычисляется  $W_k = \frac{mv^2}{2}$ , или с учётом законов (1.6) и (1.8):

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 \cdot t). \quad (1.13)$$

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной. Учитывая, что в тот момент, когда кинетическая энергия равна нулю, потенциальная энергия принимает максимальное значение и наоборот, можно утверждать, что полная энергия численно равна максимальному значению

кинетической энергии либо максимальному значению потенциальной энергии:  $W = W_{\kappa} + W_p = W_{\kappa}^{max} = W_p^{max}$ , а с учётом выражений (1.12) и (1.13) получаем

$$W = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2. \quad (1.14)$$

На основании выражений (1.12)–(1.14) можно сделать следующие выводы:

- *потенциальная энергия* изменяется с частотой в 2 раза большей, чем смещение (т. к. частота изменений функции  $\sin^2 \varphi$  в 2 раза больше, чем частота изменений  $\sin \varphi$ );
- *кинетическая энергия* изменяется с частотой в 2 раза большей, чем скорость (т. к. частота изменений функции  $\cos^2 \varphi$  в 2 раза больше, чем частота изменений  $\cos \varphi$ );
- *полная энергия* гармонических колебаний прямо пропорциональна квадрату амплитуды смещения;
- *полная энергия* гармонических колебаний прямо пропорциональна квадрату частоты колебаний;
- *полная энергия* гармонических колебаний (значит и амплитуда колебаний) не зависит от времени – колебания незатухающие.

Эти выводы относятся к колебаниям любой физической природы, а не только к поведению упругого маятника.

### 1.3. Сложение гармонических колебаний

Гармонические колебания – это не только простейший вид колебаний, но и основа любого сложного периодически повторяющегося процесса. Согласно теореме Фурье, любое сложное колебание (и более широко – любую периодическую функцию) можно представить как сумму нескольких гармонических колебаний, подбирая особым образом амплитуды, частоты и фазы складываемых колебаний (методика гармонического анализа сложного колебания рассматривается

в курсе математики). Может возникать и обратная задача (задача о сложении колебаний): определение закона результирующего колебания в ситуации, когда система участвует одновременно в двух или нескольких гармонических колебаниях. Например, в цепях переменного тока при наличии нескольких потребителей колебания токов и напряжений на разных участках цепи могут не совпадать по фазе и по амплитуде, при этом важно заранее предвидеть параметры установившихся результирующих колебаний. Существует несколько методов сложения колебаний: графический, аналитический, метод векторных диаграмм.

### Фигуры Лиссажу

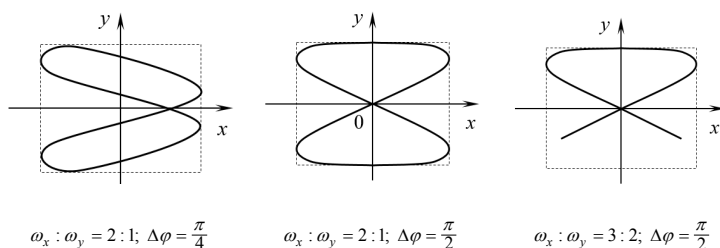


Рис. 1.5

*Графический метод* (сложение по точкам с заданным шагом) – наиболее универсальный, наиболее наглядный, но и наиболее трудоёмкий метод. Обычно он применяется при компьютерном моделировании сложных процессов в колебательных системах.

*Аналитический метод* (сложение уравнений) даёт легко интерпретируемый результат при сложении двух колебаний, различающихся не более чем по двум параметрам. Например, пусть требуется определить траекторию движения материальной точки, участвующей одновременно в двух вза-

имно перпендикулярных колебаниях с амплитудами  $A_1$  и  $A_2$ , с одинаковыми частотами и со сдвигом по фазе на  $\pi/2$ .

$$x = A_1 \sin(\omega \cdot t); y = A_2 \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = A_2 \cos(\omega \cdot t).$$

Для получения уравнения траектории  $y = f(x)$  исключим параметр  $t$  из данной системы уравнений. Разделим первое уравнение на  $A_1$ , второе – на  $A_2$ , возведём полученные уравнения в квадрат и сложим их:  $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ . Получаем уравнение эллипса, полуоси которого совпадают с осями координат. Движение по такой траектории называют эллиптически поляризованными колебаниями.

Результатом сложения взаимно перпендикулярных колебаний с разными частотами:  $x = A_1 \cos(k\omega \cdot t + \varphi_{01})$ ;  $y = A_2 \cos(n\omega \cdot t + \varphi_{02})$ , где  $k$  и  $n$  – целые числа) являются замкнутые фигуры Лиссажу (см. рис. 1.5).

При этом число точек пересечения фигуры Лиссажу с осями координат ( $N_x$  и  $N_y$ ) обратно пропорционально соответствующим частотам ( $\omega_x$  и  $\omega_y$ ), т. е.  $\frac{N_x}{N_y} = \frac{\omega_y}{\omega_x} = \frac{n}{k}$ .

*Метод векторных диаграмм* для сложения колебаний в курсе физики имеет наибольшее применение. Этот метод позволяет заменить процедуру сложения уравнений сложением векторов, что в случае сложения колебаний одного направления с одинаковыми частотами существенно ускоряет решение и делает результат более наглядным. Рассмотрим сущность метода.

Пусть есть вектор  $\vec{A}$ , вращающийся вокруг оси, проходящей через точку  $O$ , с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (см. рис. 1.6). Проекция этого вектора на ось  $x$  может быть найдена как  $x = A \cos \varphi$ , при-

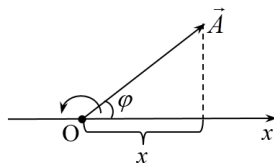


Рис. 1.6

чём при равномерном вращении, согласно кинематическим законам,  $\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$ , тогда  $x = A \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ , что совпадает с уравнением гармонических колебаний. Таким образом, между параметрами вращающегося вектора и параметрами гармонических колебаний существует взаимно однозначное соответствие:

- амплитуда колебаний соответствует длине вектора;
- циклическая частота соответствует угловой скорости вращения вектора;
- фаза колебаний соответствует углу  $\varphi$ , определяющему положение вектора в пространстве в данный момент времени.

*Примечание:* При сложении колебаний с одинаковыми частотами, по методу векторных диаграмм, взаимное расположение векторов не меняется при их вращении, поэтому положение вектора по отношению к выбранной оси обычно определяется **начальной** фазой колебаний  $\varphi_0$ . При сложении колебаний амплитуда и фаза результирующего колебания находятся по тем же правилам соответствия на основании геометрической теоремы: проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов.

На рис. 1.7 представлено сложение колебаний, описываемых уравнениями  $x_1 = A_1 \cos(\omega \cdot t + \varphi_1)$  и  $x_2 = A_2 \cos(\omega \cdot t + \varphi_2)$ .

Уравнение результирующего колебания имеет вид

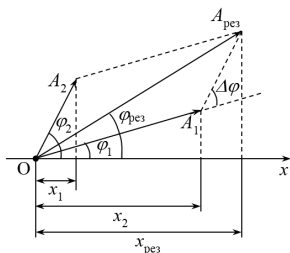
$x_{\text{рез}} = x_1 + x_2 = A_{\text{рез}} \cos(\omega \cdot t + \varphi_{\text{рез}})$ , где  $A_{\text{рез}}$  и  $\varphi_{\text{рез}}$  находятся из

векторной диаграммы:

$$A_{\text{рез}}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi; \quad (1.15)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{рез}} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}, \quad (1.16)$$

где  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  – разность фаз складываемых колебаний.



**Рис. 1.7**



## 1.4. Свободные затухающие колебания

Свободные затухающие колебания – колебания, происходящие в системе под действием «квазиупругой силы» при наличии сопротивления, пропорционального скорости.

### 1.4.1. Дифференциальное уравнение и его решение

Рассмотрим дифференциальное уравнение колебаний на примере упругого горизонтального маятника. На грузик в направлении оси  $x$  действуют две силы: сила упругости  $F_{\text{уп}} = -k \cdot x$  сила сопротивления, подчиняющаяся закону Стокса:  $F_{\text{сопр}} = -b \cdot v$ . По II закону Ньютона,  $-k \cdot x - b \cdot v = ma$ .

Учитывая, что ускорение численно равно второй производной от смещения по времени  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , а скорость – это первая производная  $v = \frac{dx}{dt}$  и вводя обозначения  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$  и  $\frac{b}{m} = 2\beta$ , получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - 2\beta \frac{dx}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.17)$$

Из математики известно, что решением данного дифференциального уравнения при  $\beta \ll \omega_0$  является функция вида

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad (1.18)$$

$$\text{где } \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (1.19)$$

Графически закон изменения  $x(t)$ , соответствующий этому уравнению, представлен на рис. 1.8.

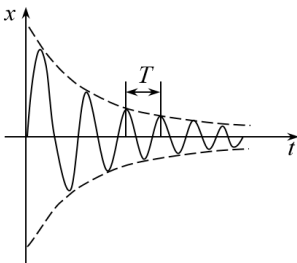


Рис. 1.8

### 1.4.2. Понятийный аппарат и основные соотношения

Амплитуда затухающих колебаний ( $A = A_0 e^{-\beta t}$ ) – коэффициент перед гармоническим членом в уравнении (1.18) – в отличие от случая собственных колебаний, не остаётся постоянной, а убывает с течением времени по экспоненциальному закону (см. рис. 1.9).

Период затухающих колебаний ( $T$ ): затухание нарушает периодичность колебаний, но если затухание мало, то можно использовать понятие «период колебаний» как промежуток времени между двумя последовательными максимумами (или минимумами) колеблющейся величины (см. рис. 1.8).

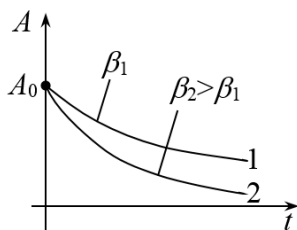


Рис. 1.9

Частота затухающих колебаний ( $\omega$ ) меньше частоты собственных колебаний, которые могли бы существовать в системе при отсутствии сопротивления:  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ .

Время релаксации ( $\tau$ ) – промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колеба-

ний уменьшается в  $e$  раз:  $\left(\frac{A_0}{A} = e\right)$ .

Коэффициент затухания ( $\beta$ ) – величина, определяющая скорость затухания. Так, на рис. 1.9 второй график относится к ситуации с большим коэффициентом затухания. Коэффициент затухания зависит от коэффициента сопротивления и инертных свойств системы:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для упругого маятника } \beta = \frac{b}{2m} \\ \text{для колебательного контура } \beta = \frac{R}{2L} \end{array} \right\} \quad (1.20)$$

Логарифмический декремент затухания ( $\delta = \ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right)$ ) – величина, используемая для характеристики скорости затухания, численно равная логарифму отношения двух соседних амплитуд колебаний (разделённых по времени периодом колебаний).

Связи между параметрами затухающих колебаний:

$$\tau = \frac{1}{\beta}; \quad \delta = \beta \cdot T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}, \quad (1.21)$$

где  $N$  – число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

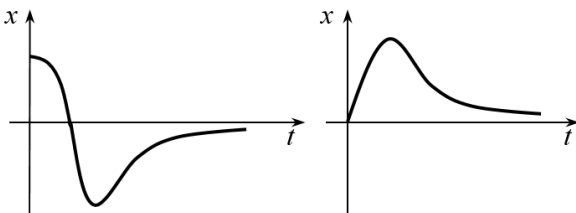


Рис. 1.10

*Апериодическое затухание* – процесс, при котором система, выведенная из состояния равновесия, возвращается в это состояние без возникновения колебаний (см. рис. 1.10). Это возможно, когда сопротивление в системе превышает некоторое критическое значение.

Критическое значение коэффициента затухания легко устанавливается из уравнения (1.19): при  $\beta_{кр} = \omega_0$  частота колебаний  $\omega = 0$ , т. е. колебания в системе становятся невозможными. Используя выражения (1.11) и (1.20), можно определить *критические значения коэффициентов сопротивления*:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для упругого маятника } b_{кр} = 2\sqrt{km} \\ \text{для колебательного контура } R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \end{array} \right\}. \quad (1.22)$$

## 1.5. Вынужденные колебания

*Вынужденные колебания* – незатухающие колебания, происходящие в системе под действием «квазиупругой силы» при наличии сопротивления, когда потери энергии восполняются за счёт источника внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону.

### 1.5.1. Дифференциальное уравнение и его решение

Рассмотрим дифференциальное уравнение колебаний на примере упругого горизонтального маятника. На грузик действуют три силы: сила упругости  $F_{\text{упр}} = -k \cdot x$ , сила сопротивления, подчиняющаяся закону Стокса  $F_{\text{сопр}} = -b \cdot v$ , и внешняя периодическая сила  $F = F_0 \cos \omega t$ . По II закону Ньютона,  $-k \cdot x - b \cdot v + F_0 \cos \omega t = ma$ . Учитывая, что ускорение численно равно второй производной от смещения по времени

$a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ , а скорость – это первая производная  $v = \frac{dx}{dt}$  и, вводя обозначения  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$  и  $\frac{b}{m} = 2\beta$ , получим

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega \cdot t. \quad (1.23)$$

Решение данного неоднородного дифференциального уравнения для случая *установившихся* колебаний имеет вид

$$x = A \cos(\omega \cdot t - \varphi). \quad (1.24)$$

### 1.5.2. Основные закономерности при вынужденных колебаниях

1. Амплитуда вынужденных колебаний ( $A$ ) в уравнении (1.24) не зависит от времени – колебания незатухающие.

2. В отличие от собственных колебаний частота вынужденных колебаний  $\omega$  не зависит от параметров системы и совпадает с частотой действующей внешней периодической силы.

3. Фаза колебаний смещения не совпадает с фазой изменения внешней периодической силы.

4. Амплитуда установившихся колебаний зависит от параметров системы и частоты.

Последнее утверждение вытекает из следующих рассуждений: возьмём первую и вторую производные от выражения (1.24) и подставим их в уравнение (1.23):

$$x = A \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi) = A\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$$A\omega^2 \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta A\omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ A\omega_0^2 \cos(\omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Полученное уравнение можно интерпретировать следующим образом: при сложении трёх колебаний, стоящих в левой части уравнения, получается четвертое колебание, описываемое выражением, стоящим в правой части выражения. Для сложения колебаний воспользуемся методом векторных диаграмм так, как это представлено на рис. 1.11. Рассматривая заштрихованный треугольник, который по построению является прямоугольным, запишем теорему Пифагора:

$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 = (A\omega_0^2 - A\omega^2)^2 + (2\beta A\omega)^2$ , откуда находим амплитуду смещения для установившихся вынужденных колебаний:

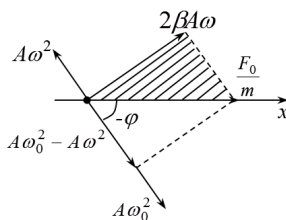


Рис. 1.11

$$A = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\beta^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}}. \quad (1.25)$$

Ранее было показано, что амплитудное значение скорости связано с амплитудой смещения соотношением  $v^{\max} = A\omega$ , тогда

$$v^{\max} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\beta^2 + \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2}}}. \quad (1.26)$$

Исследуя выражения (1.25) и (1.26) на экстремум, замечаем, что при вынужденных колебаниях существуют особые условия, при которых амплитуда смещения и амплитуда скорости могут принимать максимальные значения – т. е. возникают *резонансные явления*, графически представленные на рис. 1.12 и 1.13:

– условие возникновения резонанса смещения:

$$\omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2; \quad (1.27)$$

– условие возникновения резонанса скорости:

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0. \quad (1.28)$$

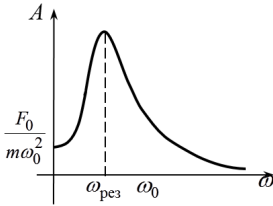


Рис. 1.12

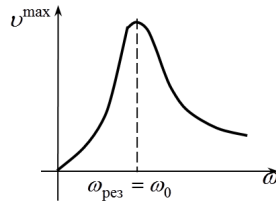


Рис. 1.13

Из выражения (1.27) следует, что при  $2\beta^2 \geq \omega_0^2$  резонанс не наступает;

– критические значения сопротивления, при которых резонанс в системе невозможен:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для упругого маятника } b_{\text{кр}} = \sqrt{2km} \\ \text{для колебательного контура } R_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2L}{C}} \end{array} \right\}. \quad (1.29)$$

## 1.6. Переменный ток как вынужденные колебания

Электрические цепи переменного тока являются наиболее распространёнными типичными системами, в которых существуют вынужденные колебания напряжения, вырабатываемого внешним источником с определённой частотой. Любой проводник, включаемый в электрическую цепь, обладает сопротивлением, индуктивностью и ёмкостью. Однако, в зависимости от материала, формы и размеров проводника могут преобладать одни его свойства, в то время как другие оказываются несущественными.

### ***1.6.1. Понятийный аппарат для описания цепей переменного тока***

*Идеализированные модели:*

- а) идеальный резистор – это проводник, индуктивностью и ёмкостью которого мы пренебрегаем;
- б) идеальная катушка – это проводник, активным сопротивлением и ёмкостью которого мы пренебрегаем;
- в) идеальный конденсатор – это система двух проводников, разделённых диэлектриком, индуктивностью и активным сопротивлением которых мы пренебрегаем.

*Внешняя периодическая «сила», задающая частоту колебаний в цепи* – это напряжение, передаваемое от источника тока в цепь и изменяющееся по гармоническому закону:  
 $U = U_0 \sin \omega t.$

*Квазистационарный ток* – это переменный ток, существующий при условии, что время распространения электромагнитного возмущения по цепи длиной  $l$  при скорости  $c$  (скорости света) значительно меньше периода колебаний тока. В этом случае можно считать, что сила тока в каждый данный момент времени одинакова во всех сечениях цепи по всей её длине. При существующих промышленных частотах переменного тока его можно рассматривать как квазистационарный. Это позволяет использовать основные законы, установленные для постоянного тока, в цепях переменного тока.

Эффективные (действующие) значения переменного тока и напряжения определяются как их среднеквадратич-

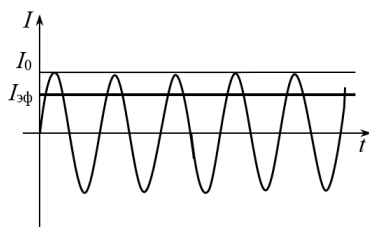


Рис. 1.14

ные значения за период ко-

лебаний 
$$I_{\text{эф}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

и соответствуют таким значениям постоянного тока и напряжения, при которых тепловая мощность постоянного и переменного тока

оказывается одинаковой. Эффективные значения меньше амплитудных (см. рис. 1.14)

$$I_{\text{эф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; U_{\text{эф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (1.30)$$

*Активное (омическое) сопротивление* ( $R_a$ ) – сопротивление, обусловленное материалом и размерами проводника, проявляется как в цепях постоянного, так и в цепях переменного тока. Активное сопротивление потребляет мощность источника, которая расходуется на его нагревание. В случае проводника с постоянным сечением по всей длине:

$$R_a = \frac{\rho \cdot l}{S}, \quad (1.31)$$



где  $\rho$  – удельное сопротивление материала проводника (табличная величина);  $l$  – длина проводника;  $S$  – площадь поперечного сечения.

*Индуктивное сопротивление* ( $R_L$ ) – сопротивление обусловленное действием ЭДС самоиндукции при прохождении переменного тока по проводнику. Согласно закону Фарадея, ЭДС самоиндукции всегда препятствует изменению тока, пропорциональна индуктивности проводника и скорости изменения тока в проводнике  $\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}$ . В связи с этим, индуктивное сопротивление зависит от частоты переменного тока  $\omega$  и индуктивности проводника  $L$ :

$$R_L = \omega L. \quad (1.32)$$

Индуктивность, в свою очередь, зависит от геометрических размеров, формы проводника и магнитных свойств окружающей среды (в случае катушки – от магнитной проницаемости  $\mu$  материала сердечника). Например, для длинного соленоида (катушки) с плотной намоткой и сплошным сердечником, занимающим весь объём  $L = \mu_0 \mu \cdot n^2 \cdot V$ , где  $n$  – густота намотки, т. е. число витков, приходящееся на единицу длины;  $V$  – объём соленоида.

*Ёмкостное сопротивление* ( $R_C$ ) – сопротивление, обусловленное процессами перезарядки конденсатора при колебаниях напряжения от внешнего источника. В цепях постоянного тока наличие конденсатора приводит к прекращению тока после короткого промежутка времени, в течение которого идет процесс зарядки конденсатора. Другими словами, конденсатор в цепи постоянного тока представляет собой бесконечно большое сопротивление, а в цепи переменного тока – конечное, которое зависит от частоты тока и электроёмкости конденсатора  $C$ :

$$R_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (1.33)$$

Емкость конденсатора, в свою очередь, зависит от геометрических размеров, формы обкладок и электрических свойств окружающей среды. В частном случае, для плоского конденсатора с однородным диэлектриком, заполняющим весь объём  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$ , где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость материала диэлектрика;  $S$  – площадь одной из пластин (обкладок) конденсатора;  $d$  – расстояние между обкладками.

*Реактивное сопротивление* – это сопротивление, не потребляющее энергию источника. Индуктивное и ёмкостное сопротивления являются реактивными, поскольку в течение одной половины периода энергия поступает от источника в цепь, а в следующие полпериода – обратно (в случае катушки – за счёт возникающей ЭДС самоиндукции, в случае конденсатора – за счёт разрядки конденсатора).

### 1.6.2. Основные законы и соотношения для цепей переменного тока

1. Идеальный резистор в цепи переменного тока.

*Сила тока и напряжение изменяются в одинаковых фазах.*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Закон изменения напряжения: } U_R = U_{0R} \sin \omega \cdot t \\ \text{Закон изменения тока: } I_R = I_{0R} \sin \omega \cdot t \end{array} \right\}. \quad (1.34)$$

Эта особенность резистора может быть отражена графически так, как показано на рис. 1.15 или в виде векторной диаграммы (см. рис. 1.16).

*Связь между амплитудными значениями тока и напряжения имеет вид*

$$I_{0R} = \frac{U_{0R}}{R_a}. \quad (1.35)$$

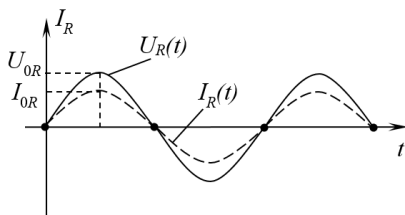


Рис. 1.15

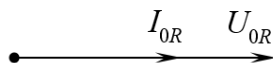


Рис. 1.16

## 2. Идеальная катушка в цепи переменного тока.

Колебания тока отстают от колебаний напряжения по фазе на  $\pi/2$  вследствие действия ЭДС самоиндукции.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Закон изменения напряжения: } U_L = U_{0L} \sin \omega t \\ \text{Закон изменения тока } I_L = I_{0L} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right\} . \quad (1.36)$$

Эта особенность катушки может быть отражена графически так, как показано на рис. 1.17 или в виде векторной диаграммы (см. рис. 1.18).

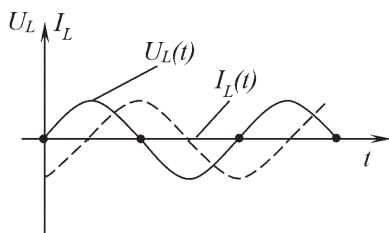


Рис. 1.17

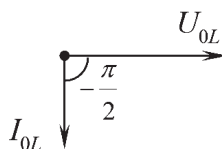


Рис. 1.18

Связь между амплитудными значениями тока и напряжения имеет вид

$$I_{0L} = \frac{U_{0L}}{R_L} = \frac{U_{0L}}{\omega L} . \quad (1.37)$$

### 3. Идеальный конденсатор в цепи переменного тока.

*Колебания тока опережают колебания напряжения по фазе на  $\pi/2$ .*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Закон изменения напряжения: } U_{0C} = U_{0C} \sin \omega \cdot t \\ \text{Закон изменения силы тока: } I_C = I_0 \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (1.38)$$

Эта закономерность может быть отражена графически так, как показано на рис. 1.19 или в виде векторной диаграммы (см. рис. 1.20).

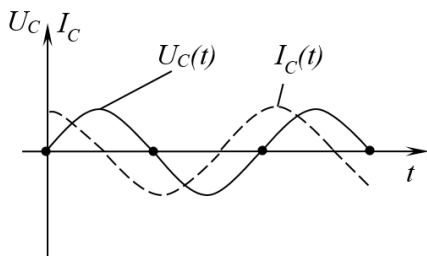


Рис. 1.19

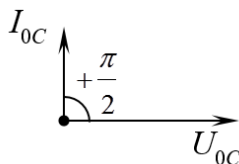


Рис. 1.20

*Связь между амплитудными значениями тока и напряжения имеет вид*

$$I_{0C} = \frac{U_{0C}}{R_C} = U_{0C} \omega C. \quad (1.39)$$

4. Цепь переменного тока с последовательным соединением резистора, катушки и конденсатора (см. рис. 1.21).

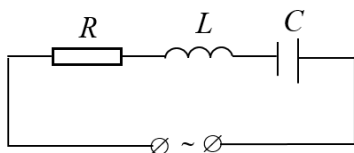


Рис. 1.21

При последовательном соединении сила тока одинакова во всех участках цепи, а колебания напряжения могут не совпадать по фазе с колебаниями тока, как это рассмотрено выше:

Закон изменения тока в цепи  $I = I_0 \sin \omega \cdot t$ .

Закон изменения напряжения на резисторе:

$$U = U_{\rho} \sin \omega \cdot t. \quad (').$$

Закон изменения напряжения на катушке:

$$U_L = U_{0L} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (').$$

Закон изменения напряжения на конденсаторе:

$$U_C = U_{0C} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (').$$

Закон изменения общего напряжения в цепи:

$$U_{об} = U_{об} \sin (\omega t + \varphi).$$

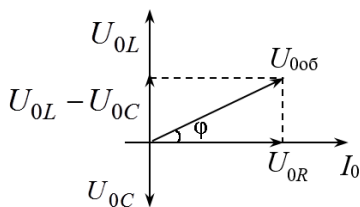


Рис. 1.22

Известно, что при последовательном соединении в любой момент времени общее напряжение равно сумме напряжений на отдельных участках цепи:  $U_{об} = U_R + U_L + U_C$ . Это означает, что задача о нахождении

параметров результирующего колебания напряжения в цепи сводится к задаче сложения трёх колебаний: ('), ('), ('). Для нахождения амплитудного значения общего напряжения в цепи  $U_{об}$  и сдвига фаз между током и общим напряжением  $\varphi$  воспользуемся методом векторных диаграмм (см. рис. 1.22).

Из векторной диаграммы видно, что

$$U_{об} = \sqrt{U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2}; \quad (*)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{0L} - U_{0C}}{U_{0R}}. \quad (**)$$

Подставляя в выражения (\*) и (\*\*) значения для амплитудных значений напряжений из уравнений (1.35), (1.37), (1.39), а также записывая по аналогии  $U_{об} = I_0 Z$ , где  $Z$  – общее сопротивление цепи, а  $I_0$  одинаково на всех участках, получаем

закон для нахождения полного сопротивления цепи при последовательном соединении  $R$ ,  $L$  и  $C$ :

$$Z_{0\text{об}} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (1.40)$$

Обратим внимание, что данное соотношение получено на основе векторной диаграммы, а значит, отражает наличие сдвига фаз между колебаниями напряжения на участках цепи с различными типами нагрузки (активной, индуктивной и ёмкостной). Если в цепи переменного тока существует несколько участков с одинаковым типом нагрузки, то указанного сдвига фаз не возникает, и полное сопротивление находится как простая сумма сопротивлений отдельных участков:  $Z = R_1 + R_2 + R_3$ . Это совпадает с законом для нахождения общего сопротивления при последовательном соединении проводников в цепях постоянного тока, где отсутствуют конденсаторы и не возникает явление электромагнитной индукции, т. е. все проводники обладают чисто активным сопротивлением.

Закон Ома для цепи переменного тока при последовательном соединении  $R$ ,  $L$  и  $C$ :

$$I_0 = \frac{U_{0\text{об}}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (1.41)$$

Закон для нахождения сдвига фаз между током и напряжением в цепи с последовательным соединением  $R$ ,  $L$  и  $C$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_L - R_C}{R_a} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_a}. \quad (1.42)$$

Аналогичные соотношения в цепи переменного тока при параллельном соединении потребителей рассмотрены в примерах решения задач (см. пример 5 в гл. 1.8).

## 5. Резонанс в цепи переменного тока.

Исследуя на экстремум выражение (1.41), можно получить:

– условие, при котором амплитуда тока принимает максимальное значение (условие резонанса):  $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}$ , откуда

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (1.43)$$

– амплитудное значение тока в момент резонанса

$$I_{0\text{рез}} = \frac{U_{0\text{об}}}{R_a}; \quad (1.44)$$

– напряжение на конденсаторе в момент резонанса

$$U_{0C} = I_{0\text{рез}} R_C = \frac{I_{0\text{рез}}}{\omega_{\text{рез}} C} = \frac{U_{0\text{об}}}{R_a} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

где  $\frac{1}{R_a} \sqrt{\frac{L}{C}} = \theta$  – добротность контура.

Из полученного следует, что при  $\theta > 1$ ,  $U_{0C} = \theta \cdot U_{0\text{об}} > U_{0\text{об}} (!)$ , т. е. при добротности контура больше единицы в момент резонанса напряжение на конденсаторе превышает общее напряжение в цепи.

## 6. Мощность в цепи переменного тока:

– для мгновенного значения мощности

$$p = IU = I_0 U_0 \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} I_0 U_0 [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)].$$

Учитывая, что среднее за период значение  $\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = 0$ , а эффективные и амплитудные значения связаны соотношениями  $I_{\text{эф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  и  $U_{\text{эф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ , получаем для среднего значения мощности

$$\langle p \rangle = I_{\text{эф}} \cdot U_{\text{эф}} \cdot \cos \varphi, \quad (1.45)$$

где  $\cos \varphi$  – коэффициент мощности.

Анализ выражения (1.45) показывает, что при чисто активном сопротивлении цепи, когда сдвиг фаз между током и напряжением  $\varphi = 0$ , средняя потребляемая мощность максимальна:  $\langle p \rangle = I_{\text{эф}} \cdot U_{\text{эф}}$ . При реактивной нагрузке (ин-

дуктивное и/или ёмкостное сопротивление), когда сдвиг фаз между током и напряжением  $\varphi = \pi/2$ , средняя потребляемая мощность  $\langle p \rangle = 0$ .

### 1.7. Автоколебания

*Автоколебания* – незатухающие колебания, происходящие в системе при наличии сопротивления, когда потери энергии восполняются за счёт постоянного источника, периодически подключаемого к системе.

Преимуществом автоколебаний по сравнению с вынужденными колебаниями является то, что частота колебаний определяется не внешним источником, а параметрами самой системы, а значит, может легко регулироваться.

*Основные элементы автоколебательной системы:*

- колебательная система, в которой могут происходить свободные затухающие колебания;
- постоянный источник энергии, восполняющий потери энергии на преодоление сопротивления;
- «выключатель», позволяющий периодически отключать и подключать источник энергии к системе;
- элемент обратной связи, обеспечивающий дозирование и синхронизацию поступления энергии в систему в такт с колебаниями.

Наиважнейшим свойством автоколебательных систем является *саморегуляция*. Благодаря элементу обратной связи система сама поддерживает постоянство параметров системы (частоты и амплитуды колебаний). Именно это свойство обеспечивает особую важность и широкую распространённость этих систем в природе и технике. Примерами автоколебательных систем являются часовой механизм, двигатель внутреннего сгорания, генератор электромагнитных колебаний с регулируемой частотой, гейзеры.



## 1.8. Примеры решения задач к разделу «Колебательные процессы»

**Пример 1.** Материальная точка массой 8 г совершает гармонические колебания с частотой  $\nu = 0,5$  Гц. Амплитуда колебаний  $A = 3,6$  см. *Определить скорость точки в момент времени, когда её смещение от положения равновесия  $x_1 = +1,8$  см, максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колеблющейся точки.*

**Решение.** Запишем законы для данного вида движения:

Закон смещения в общем случае имеет вид

$$x = A \sin (\omega t + \varphi_0). \quad (1)$$

Закон скорости находим как первую производную от смещения по времени:

$$v = A \omega \cos (\omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

Закон ускорения находим как производную от скорости по времени:

$$a = -A\omega^2 \sin (\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

Сила и ускорение связаны II законом Ньютона:  $F = ma$ , и, соответственно, для максимальных значений

$$F^{max} = ma^{max}. \quad (4)$$

Полная механическая энергия при гармонических колебаниях находится так:

$$W = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2. \quad (5)$$

По условию, в некоторый момент времени  $t_1$  смещение точки от положения равновесия  $x_1 = 1,8$  см, в этот же момент скорость точки принимает значение  $v_1$ , которое нужно найти.

*Первый способ рассуждения.*

Чтобы связать между собой смещение и скорость в один и тот же момент времени, преобразуем уравнения (1) и (2) следующим образом:  $\frac{x_1}{A} = \sin(\omega \cdot t_1 + \varphi_0)$ ;  $\frac{v_1}{A\omega} = \cos(\omega \cdot t_1 + \varphi_0)$ . Возве-

дём эти уравнения в квадрат и сложим:  $\left(\frac{x_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{A\omega}\right)^2 = 1$ , откуда  $\frac{v_1^2}{A^2\omega^2} = 1 - \frac{x_1^2}{A^2}$  или  $v_1^2 = A^2\omega^2 - x_1^2\omega^2$ . Окончательно

$$v_1 = \pm \omega \sqrt{A^2 - x_1^2}. \quad (6)$$

*Второй способ рассуждения.*

По условию, в некоторый момент времени  $t_1$  смещение точки от положения равновесия равно  $x_1$ , тогда из выражения (1)  $\sin(\omega \cdot t_1 + \varphi_0) = \frac{x_1}{A}$ . Используя основное тригонометрическое тождество, найдём для того же момента времени  $\cos(\omega \cdot t_1 + \varphi_0) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega \cdot t_1 + \varphi_0)} = \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2}$ . Подставляя полученное значение косинуса в выражение (2), находим скорость  $v_1$  в тот момент времени, когда смещение принимает значение  $x_1$ :  $v_1 = \pm A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x_1^2}$ , что совпадает с выражением (6).

Из выражения (3) максимальное значение ускорения по абсолютной величине найдётся как  $a^{\max} = A\omega^2$ , поскольку максимальное значение синуса равно 1. Тогда

$$F^{\max} = mA\omega^2. \quad (7)$$

Произведём вычисления в системе СИ с учётом  $\omega = 2\pi\nu$ :  
– из выражения (6):

$$v_1 = \pm 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \sqrt{3,6^2 \cdot 10^{-4} - 1,8^2 \cdot 10^{-4}} = \pm 9,79 \cdot 10^{-2} \text{ (м/с)};$$

– из выражения (7):

$$F^{\max} = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 3,6 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,25 = 2,84 \cdot 10^{-3} \text{ (Н)};$$

– из выражения (5):

$$W = 0,5 \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 12,96 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 3,14^2 \cdot 0,25 = 5,11 \cdot 10^{-5} \text{ (Дж)}.$$

**Ответ:**  $v \pm 9,79 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$ ,  $F^{\max} = 2,84 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$ ,  
 $W = 5,11 \cdot 10^{-5} \text{ (Дж)}$ .

**Пример 2.** В колебательном контуре, активным сопротивлением которого можно пренебречь, колебания заряда

на обкладках конденсатора происходят без начальной фазы. Определить отношение энергии магнитного поля в катушке индуктивности к энергии электрического поля в конденсаторе через  $t = \frac{T}{6}$ .

**Решение.** В данной задаче уравнение гармонических колебаний заряда на обкладках конденсатора имеет вид

$$q = q^{\max} \sin \omega \cdot t. \quad (1)$$

Закон изменения силы тока в контуре найдём как первую производную от заряда по времени

$$I = \frac{dq}{dt} = q^{\max} \omega \cos(\omega \cdot t) = I^{\max} \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $I^{\max} = q^{\max} \omega$ .

Используя данные табл. 1.2, энергию электрического и магнитного полей в колебательном контуре можно представить следующими формулами:

$$W_{\text{маг}} = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L (I^{\max})^2 \cos^2 \omega \cdot t = \frac{1}{2} L (q^{\max} \omega)^2 \cos^2 \omega \cdot t, \quad (3)$$

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2C} (q^{\max})^2 \sin^2 \omega \cdot t. \quad (4)$$

Разделим выражение (3) на выражение (4):

$$\frac{W_{\text{маг}}}{W_{\text{эл}}} = LC \omega^2 \left( \frac{\cos^2 \omega \cdot t}{\sin^2 \omega \cdot t} \right).$$

Учитывая, что циклическая частота колебаний связана с периодом соотношением  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , а с индуктивностью катушки и ёмкостью конденсатора соотношением  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ , последнее уравнение запишем в виде

$$\frac{W_{\text{маг}}}{W_{\text{эл}}} = \frac{\cos^2 \frac{2\pi}{T} \cdot t}{\sin^2 \frac{2\pi}{T} \cdot t}. \quad (5)$$

Произведём вычисления в системе СИ с учётом условия задачи  $t = \frac{T}{6}$ :

$$\frac{W_{\text{маг}}}{W_{\text{эл}}} = \frac{\cos^2 2\pi T / 6T}{\sin^2 2\pi T / 6T} = \frac{\cos^2 \pi / 3}{\sin^2 \pi / 3} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

**Ответ:**  $\frac{W_{\text{маг}}}{W_{\text{эл}}} = \frac{1}{3}.$

**Пример 3.** Определить амплитуду и начальную фазу колебания, получающегося от сложения двух гармонических колебаний, описываемых уравнениями  $x_1 = 2 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$  и  $x_2 = 3 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ . Записать уравнение результирующего колебания.

**Решение.** В задаче рассматривается сложение колебаний одного направления с одинаковыми частотами, поэтому можно воспользоваться методом векторных диаграмм. На основании заданных уравнений, определяем амплитуды и начальные фазы складываемых колебаний:  $A_1 = 2$ ;  $A_2 = 3$ ;  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ;  $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$ . Как видим, разность фаз складываемых колебаний  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ . Построим векторную диаграмму для начального момента времени  $t = 0$ . Каждому колебанию можно поставить в соответствие вращающийся вектор, длина которого совпадает с амплитудой колебаний, а положение отно-

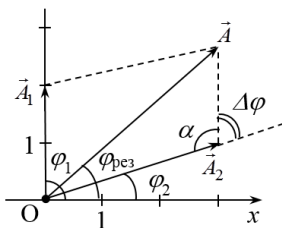


Рис. 1.23

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}; A_1 = 2$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{6}; A_2 = 3$$

сительно выбранной оси  $X$  определяется начальной фазой колебаний (см. рис. 1.23). Выполним сложение векторов по правилу параллелограмма и найдём амплитуду ре-

зультирующего колебания по теореме косинусов:

$A_{\text{рез}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha}$ , где  $\alpha = \pi - \Delta\varphi$ , тогда  $\cos \alpha = -\cos \Delta\varphi$  и теорема косинусов принимает вид

$$A_{\text{рез}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}. \quad (1)$$

Тангенс угла, соответствующего начальной фазе результирующего колебания, на основании выражения (1.16), найдём следующим образом:

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{рез}} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (2)$$

Произведём вычисления:

– из выражения (1):

$$A_{\text{рез}} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 12 \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{4 + 9 + 6} = 4,36;$$

– из выражения (2):

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{рез}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 \sin \frac{\pi}{6}}{2 \cos \frac{\pi}{2} + 3 \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2 + 3 \cdot 0,5}{0 + 3 \cdot 0,87} = 1,341, \text{ откуда}$$

$$\varphi_{\text{рез}} = \arctg 1,341 = 0,93\pi.$$

При сложении колебаний с одинаковыми частотами возникает колебание той же частоты, поэтому уравнение результирующего колебания можно записать в виде  $x_{\text{рез}} = A_{\text{рез}} \cos(3\pi t + \varphi_{\text{рез}}) = 4,36 \cos(3\pi t + 0,93\pi)$ .

**Ответ:**  $A_{\text{рез}} = 4,36$ ;  $\varphi_{\text{рез}} = 0,93\pi$ ;  $x_{\text{рез}} = 4,36 \cos(3\pi t + 0,93\pi)$ .

**Пример 4.** Смещение светящейся точки на экране осциллографа является результатом сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний, которые описываются уравнениями  $x = 2 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$  и  $y = 3 \cos \omega t$ . *Определить форму траектории движения этой точки, изобразить её графически и указать направление движения точки по траектории.*

**Решение.** В задаче рассматривается сложение взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами. Воспользуемся аналитическим методом. Для нахождения уравнения траектории движения  $y = f(x)$  исключим из заданной си-

стемы уравнений параметр  $t$ , для этого преобразуем исходные уравнения следующим образом:  $\frac{x}{2} = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ , или  $\frac{x}{2} = \sin \omega t$ ;  $\frac{y}{3} = \cos \omega t$ . Возведём полученные уравнения в квадрат и сложим их:  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t$ , или  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$  – это уравнение эллипса с полуосями 2 см и 3 см. Изобразим траекторию движения точки на рисунке (см. рис. 1.24).

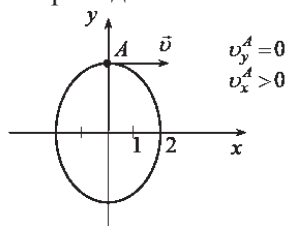


Рис. 1.24

Для определения направления движения по траектории обозначим знаки проекций скорости на координатные оси в одной из точек траектории, например, при  $t = 0$ . Уравнения изменения проекций скорости найдём как первые про-

изводные от заданных по условию уравнений  $x(t)$  и  $y(t)$ :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2\omega \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (1)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -3\omega \cdot \sin \omega t. \quad (2)$$

Из исходных уравнений, при  $t = 0$   $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 3$  см, что соответствует точке  $A$  на рис. 1.24.

Из выражений (1) и (2), при  $t = 0$ ,  $v_y^A = 0$ ,  $v_x^A = -2\omega \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = +2\omega > 0$  (т. к. циклическая частота  $\omega > 0$ ). Это означает, что полная скорость в точке  $A$  направлена параллельно оси  $X$  вправо, т. е. движение точки по эллипсу происходит в направлении «по часовой стрелке».

**Ответ:** траектория движения – эллипс с полуосями 2 см и 3 см, совпадающими с осями координат  $X$  и  $Y$ , соответственно. Движение по траектории происходит «по часовой стрелке».

**Пример 5.** Активное сопротивление и индуктивность соединены параллельно и включены в цепь переменного тока с эффективным напряжением 127 В и частотой 50 Гц. Изобразить векторную диаграмму. Найти активное сопротивление и индуктивность, если известно, что мощность, поглощаемая в этой цепи равна 404 Вт, а сдвиг фаз между напряжением и током равен  $60^\circ$ .

**Решение.** В задаче рассматриваются вынужденные колебания в цепи переменного тока. Методика расчёта параметров цепи для случая последовательного соединения потребителей рассмотрена в пункте 4 гл. 1.6.2. Применим эту методику для параллельного соединения. Известно, что при параллельном соединении напряжение во всех ветвях одинаково, а общий ток в неразветвленной части цепи является суммой токов в отдельных ветвях:  $I_{об} = I_R + I_L$  (см. рис. 1.25).

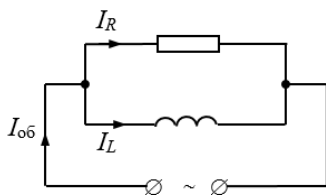


Рис. 1.25

Примем, что напряжение меняется с течением времени по закону  $U = U_0 \sin \omega \cdot t$ . Учитывая, что на резисторе ток и напряжения изменяются в одинаковой фазе, а на катушке индуктивности ток отстаёт от напряжения

по фазе на  $\pi/2$  (вследствие действия ЭДС самоиндукции), запишем:

Закон изменения тока в ветви с резистором:

$$I_R = I_{0R} \sin \omega \cdot t. \quad (1)$$

Закон изменения тока в ветви с индуктивностью:

$$I_L = I_{0L} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (2)$$

Закон изменения общего тока в цепи:  $I_{об} = I_{0об} \sin(\omega t - \varphi)$ .

Для нахождения амплитудного значения общего тока в цепи  $I_{0\phi\phi}$  и сдвига фаз между общим током и напряжением  $\varphi$ , сложим колебания (1) и (2) методом векторных диаграмм (см. рис. 1.26).

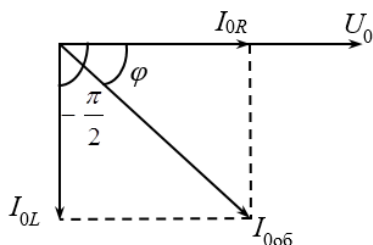


Рис. 1.26

Из векторной диаграммы видим, что

$$(I_{0\phi\phi})^2 = (I_{0R})^2 + (I_{0L})^2; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{0L}}{I_{0R}}; \quad \cos \varphi = \frac{I_{0R}}{I_{0\phi\phi}}. \quad (4)$$

Подставляя в выражения (3) и (4) значения для амплитудных значений токов

$I_{0R} = \frac{U_0}{R_a}$  и  $I_{0L} = \frac{U_0}{R_L}$ , а также записывая по аналогии  $I_{0\phi\phi} = \frac{U_0}{Z}$ , где  $Z$  – полное сопротивление цепи, а  $U_0$  одинаково на всех участках, получаем законы для нахождения полного сопротивления цепи и сдвига фаз между током и напряжением при параллельном соединении  $R$  и  $L$ :

$$\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R_a}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_L}\right)^2 = \left(\frac{1}{R_a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R_a}{R_L} = \frac{R_a}{\omega L}; \quad (6)$$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{R_a}. \quad (7)$$

На основании уравнения (1.45) мощность в цепи переменного тока

$$\langle p \rangle = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos \varphi. \quad (8)$$

Произведём вычисления в системе СИ с учётом  $\omega = 2\pi\nu = 100\pi = 314 \text{ c}^{-1}$ :

$$\text{из выражения (8): } I_{\text{эф}} = \frac{\langle p \rangle}{U_{\text{эф}} \cos \varphi} = \frac{404}{127 \cos 60^\circ} = 6,36.$$



$$\text{Полное сопротивление цепи } Z = \frac{U_0}{I_{0\text{об}}} = \frac{U_{\text{эф}}}{I_{\text{эф}}} = \frac{127}{6,36} = 20 \text{ (Ом)};$$

$$\text{– из (7): } R_a = \frac{Z}{\cos \varphi} = \frac{20}{0,5} = 40 \text{ (Ом)};$$

$$\text{– из (6): } L = \frac{R_a}{\omega \cdot \operatorname{tg} \varphi} = \frac{40}{3,14 \cdot 1,73} = 0,0736 \text{ (Гн)}.$$

Для проверки правдоподобности результатов можно использовать уравнение (5):

$$\frac{1}{20^2} = \frac{1}{40^2} + \frac{1}{(314 \cdot 0,0736)^2},$$

$$2,5 \cdot 10^{-3} = 0,63 \cdot 10^{-3} + 1,87 \cdot 10^{-3},$$

$$2,5 \cdot 10^{-3} = 2,5 \cdot 10^{-3}.$$

**Ответ:**  $R_a = 40 \text{ Ом}$ ,  $L = 73,6 \text{ мГн}$ .

### **Контрольные вопросы к разделу «Колебательные процессы»**

**1.** Запишите уравнение гармонических колебаний в общем виде. Какой физический смысл имеет переменный параметр  $x$  в этом уравнении в случае упругих колебаний маятника и в случае электромагнитных колебаний в колебательном контуре?

*Таблица 1.2*

**Аналогия упругих и электромагнитных колебаний**

<b>Упругие колебания</b>	<b>Электромагнитные колебания</b>
$x$ – смещение грузика от положения равновесия	$q$ – заряд на обкладках конденсатора
$v = \frac{dx}{dt}$ – скорость колебаний грузика на пружине	$I = \frac{dq}{dt}$ – сила тока в контуре
$m$ – масса грузика	.....

Окончание табл. 1.2

Упругие колебания	Электромагнитные колебания
$F_{\text{упр}} = kx$ – сила упругости, действующая на грузик со стороны пружины	.....
$k$ – коэффициент упругости пружины	.....
$T = \dots$ – период собственных колебаний упругого маятника	$T = 2\pi\sqrt{LC}$ – период собственных колебаний в колебательном контуре
$b$ – коэффициент сопротивления в системе	.....
$F_{\text{сопр}} = bv$ – сила сопротивления	$U = \dots$ – потеря напряжения на катушке
$\beta = \frac{b}{2m}$ – коэффициент затухания свободных колебаний упругого маятника при наличии сопротивления в системе	$\beta = \dots$ – коэффициент затухания свободных колебаний в колебательном контуре
$b_{\text{кр}} \dots$ – условие ангармонического затухания для упругого маятника	$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{LC}$ – условие ангармонического затухания в колебательном контуре
$W_{\text{к}} = \frac{1}{2}mv^2$ – кинетическая энергия грузика на пружине	$W_{\text{маг}} = \dots$ – энергия магнитного поля катушки индуктивности
$W_{\text{п}} = \frac{1}{2}kx^2$ – потенциальная энергия деформированной пружины	$W_{\text{эл}} = \dots$ – энергия электрического поля конденсатора

2. Используя табл. 1.1 и соотношения (1.11), (1.20), (1.22), установите аналогию между величинами, описывающими упругие и электромагнитные колебания, закончив заполнение табл. 1.2

3. Известно, что затухающие колебания существуют в системах при наличии сопротивления (пропорционального скорости колебаний) и «квазиупругой силы» (пропорциональной смещению системы от состояния равновесия). Дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$  (\*). Какое слагаемое в левой части этого уравнения связано с действием сил сопротивления, а какое – с квазиупругой силой? Запишите решение данного уравнения. Какой физический смысл имеет коэффициент  $\omega_0$  в уравнении (\*)? Какова связь этого коэффициента с циклической частотой затухающих колебаний, которая присутствует в решении уравнения (\*)?

4. Что такое ангармоническое затухание? Как определить критическое сопротивление, при котором оно возникает?

5. Сравните факторы, влияющие на частоту и амплитуду разных типов колебаний. Результат сравнения представьте в виде табл. 1.3.

Таблица 1.3

**Факторы, влияющие на частоту и амплитуду  
разных типов колебаний**

<i>Тип колебаний</i>	<i>Частота колебаний зависит от</i>	<i>Амплитуда колебаний зависит от</i>
Собственные колебания		
Затухающие колебания		
Вынужденные колебания		
Автоколебания		

6. Согласно методу векторных диаграмм, каждому колебанию можно поставить в соответствие вращающийся вектор. Какой характеристике колебаний соответствует длина вектора? Какой характеристике колебаний соответствует угол, образуемый вектором с осью  $X$ ?

На векторной диаграмме (см. рис. 1.27) представлено сложение двух гармонических колебаний, имеющих частоту  $\omega$ . Запишите уравнения складываемых колебаний и уравнение результирующего колебания.

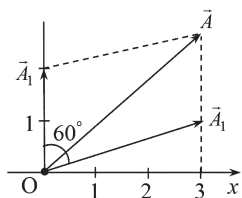


Рис. 1.27

$$|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2|$$

7. Для поддержания незатухающих колебаний в системах, обладающих сопротивлением, необходимо пополнение энергии за счёт внешнего источника. Существует два метода решения этой задачи: вынужденные колебания и автоколебания. В чём разница этих методов? В чём преимущества автоколебательных систем над системами с вынужденными колебаниями? Каково назначение элемента обратной связи в автоколебательной системе?

8. К какому типу колебаний относятся колебания тока и напряжения в цепях переменного тока? От чего зависит частота этих колебаний?

9. Почему в цепях постоянного тока при последовательном соединении нескольких проводников общее сопротивление находится по формуле  $R_{\text{общ}} = R_1 + R_2 + R_3$ , а в цепях переменного тока – по формуле  $Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$ ? Запишите формулу для расчёта полного сопротивления цепи переменного тока, если в эту цепь последовательно включены три идеальные катушки с индуктивностями  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , а частота тока –  $\omega$ .

10. В чём сущность явления резонанса? Каковы условия его возникновения?

11. Имеется цепь переменного тока с последовательным соединением  $L$ ,  $R$ ,  $C$  в режиме резонанса. Чему равно амплитудное значение тока в цепи и сдвиг фаз между током и общим напряжением?

12. При каких условиях в цепи переменного тока с последовательным соединением  $L$ ,  $R$ ,  $C$  напряжение на конденсаторе может оказаться больше, чем общее напряжение в цепи?

*Рекомендуемая литература*

1. Верхотуров А. Р., Шамонин В. А. Физика: учеб. пособие по курсу общей физики для направлений подготовки бакалавров: в 2 кн. Кн. 2. – Чита: ЧитГУ, 2011. – 176 с.

2. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие. – Москва: Высшая школа, 2007. – 560 с.

## Глава 2. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

*Волной* называется процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени, с конечной скоростью, зависящей от свойств, среды. Волна представляет собой изменяющееся со временем пространственное чередование максимумов и минимумов любой физической величины, например, плотности вещества, напряжённости электрического поля, температуры и т. д.

По физической природе волны можно разделить на три вида: *упругие волны, волны на поверхности жидкости, электромагнитные волны*. Физическая среда, в которой распространяются волны, накладывает особенности на характер их распространения, оставляя неизменными базовые волновые свойства.

*Основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.*

### 2.1. Общие понятия

Геометрически у волн выделяют следующие элементы:

1. *Волновая поверхность* – это множество всех точек пространства, в которых фаза колебаний в данный момент времени имеет одно и то же значение.

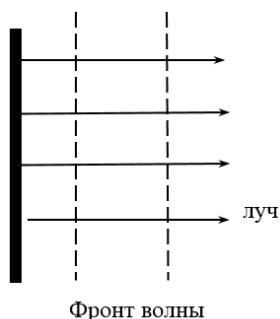


Рис. 2.1

2. *Фронт волны* – геометрическое место точек, до которых дошли колебания в данный момент времени. При распространении одиночной волны в изотропной среде волновая поверхность и фронт волны совпадают.

3. *Луч* – линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением распространения волны. В изотропной среде лучи перпендикулярны волновому фронту.

### *Классификация волн по форме фронта волны*

*Плоские волны* – это волны, у которых плоскости равных фаз перпендикулярны направлению распространения волны и параллельны друг другу (см. рис. 2.1).

*Сферические волны* – это волны, у которых поверхностью равных фаз является сфера. Сферы волновых поверхностей концентрические (см. рис. 2.2).

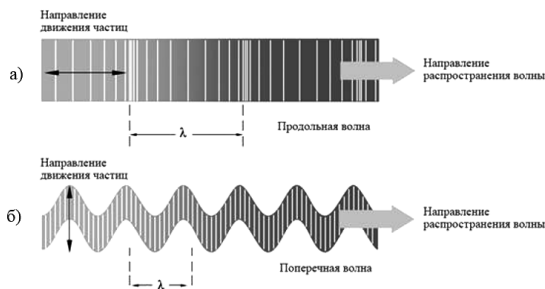


**Рис. 2.2**

Возможны и другие, более сложные, формы фронта волны.

### *Классификация волн по соотношению между направлением колебаний и направлением распространения фронта волн*

*Продольные волны* – это волны, в которых колебания происходят вдоль направления распространения волны.



**Рис. 2.3**

Например, в случае распространения звука в газе периодическое изменение плотности газа в соседних слоях происходят в том же направлении, в котором распространяется волна (см. рис. 2.3 а).

*Поперечные волны* – волны, в которых колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Например, волны в шнуре, электромагнитные волны (см. рис. 2.3 б).

Существуют также волны смешанного типа. Например, волны на поверхности жидкости, представляют собой комбинацию движений в поперечном и продольном направлении.

*Плоская монохроматическая волна* (идеализированная модель) – простейший вид волны, в которой колебания происходят по закону косинуса или синуса, с постоянной во времени и в пространстве амплитудой и частотой. В дальнейшем изложении будет использоваться, преимущественно, эта модель.

*Уравнение плоской монохроматической волны* легко получить путём следующих рассуждений. Если в точке  $C$ , находится источник гармонических колебаний, описываемых уравнением  $\xi = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ , и эти колебания распространяются вдоль оси  $X$  со скоростью  $v$ , то в произвольную точку  $K$  с координатой  $x$  по отношению к источнику колебания дойдут с запаздыванием по времени:  $\tau = \frac{x}{v}$ . Тогда колебания параметра  $\xi$  в этой точке можно описать уравнением

$$\xi = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (2.1)$$

Замечаем, что в уравнении (2.1) функция косинуса является периодической и содержит две переменные ( $x$  и  $t$ ). Это означает, что волна – это дважды периодический процесс: он периодически повторяется во времени и периодически



повторяется в пространстве, как это изображено на рис. 2.4 а и 2.4 б (а – периодическая повторяемость во времени; б – периодическая повторяемость в пространстве).

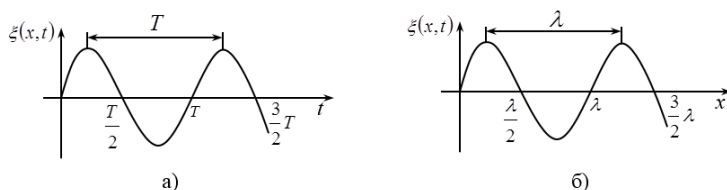


Рис. 2.4

## 2.2. Понятийный аппарат: основные характеристики волн

*Скорость волны* ( $v$ ) – фазовая скорость, величина численно равная расстоянию, которое за единицу времени проходит любая точка волновой поверхности.

*Период колебаний* ( $T$ ) – физическая величина, характеризующая периодическую повторяемость волнового процесса во времени, численно равная промежутку времени, за который происходит полный цикл колебаний (см. рис. 2.4 а).

*Длина волны* ( $\lambda$ ) – физическая величина, характеризующая периодическую повторяемость волнового процесса в пространстве, численно равная наименьшему расстоянию между двумя точками, колеблющимися в одинаковых фазах (см. рис. 2.4 б).

Длину волны можно определить также как расстояние, на которое распространяется волна за время равное периоду колебаний. Из этого определения, вытекает *связь между длиной волны и периодом колебаний*:

$$\lambda = vT. \quad (2.2)$$

*Волновое число* ( $k$ ) – величина, показывающая, сколько длин волн умещается в  $2\pi$  единицах длины:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.3)$$

Такие характеристики волны как амплитуда ( $A$ ), частота ( $\nu$ ), круговая частота ( $\omega = 2\pi\nu$ ), фаза были введены в гл. 1 данного пособия, где описывались колебательные процессы.

*Интенсивность волны* – физическая величина, равная энергии, переносимой волной за единицу времени через единицу площади поверхности перпендикулярно направлению распространения волны:

$$J = \frac{W}{S_{\perp} t}. \quad (2.4)$$

### 2.3. Некоторые особенности упругих и электромагнитных волн

*Упругие волны* – механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Источниками упругих волн являются тела, которые воздействуя на среду, вызывают её деформацию. Механические волны переносят энергию от одной колеблющейся частицы к другой. Частицы совершают только колебательные движения, но не движутся вместе с волной. Энергия волны в упругой среде состоит из кинетической энергии совершающих колебания частиц вещества и из потенциальной энергии упругой деформации среды. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояния колебательного движения и его энергия.

Упругие волны, распространяющиеся в среде и обладающие частотами в пределах  $16 - 2 \cdot 10^4$  Гц, называются *звуковыми*, при этом волны с разной частотой отличаются друг от друга высотой тона. Волны с частотой менее 16 Гц называют *инфразвуком*, а с частотой более 20 000 Гц – *ультразвуком*.

Энергия колебаний, как было показано в предыдущей главе, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, поэтому изменение амплитуды волны означает изменение её энергии, а в случае звуковых волн – изменение субъективно воспринимаемой громкости звука.

Звуковые волны в жидкой и газообразной среде могут быть только продольными. В твёрдых телах звуковые волны могут быть как продольными, так и поперечными.

Изменяющееся во времени и распространяющееся в пространстве электромагнитное поле образует *электромагнитную волну*. Уравнение плоской монохроматической электромагнитной волны, может быть записано в виде

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \text{ и } H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi); \quad (2.5)$$

где  $E_0$  и  $H_0$  – соответственно, амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны;  $\omega$  – циклическая частота,  $k = \frac{\omega}{v}$  – волновое число;  $\varphi$  – начальная фаза колебаний в точке с координатой  $x = 0$ . При изменении частоты (длины волны) изменяются свойства волн. Принято выделять следующие диапазоны электромагнитных волн: радиоволны, оптическое излучение, рентгеновское излучение, гамма-излучение.

*Радиоволны:*  $\lambda = 10^3 - 10^4$  (м),  $\nu = 3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{12}$  (Гц).

*Световые волны* подразделяются на:

– *инфракрасное излучение:*

$\lambda = 5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$  (м),  $\nu = 6 \cdot 10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$  (Гц);

– *видимый свет:*

$\lambda = 8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$  (м),  $\nu = 3,75 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$  (Гц).

Частота света определяет цвет излучения. Ощущению красного цвета соответствует длинноволновая часть диапазона видимого света. Фиолетовый свет имеет наименьшую

длину волны. Белый свет не является монохроматическим: в его состав входят волны с разной длиной волны;

– ультрафиолетовое излучение:

$$\lambda = 4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9} (\text{м}); \nu = 7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17} (\text{Гц}).$$

Рентгеновское излучение:

$$\lambda = 2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12} (\text{м}); \nu = 1,5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19} (\text{Гц}).$$

g-излучение:  $\lambda < 6 \cdot 10^{-12} (\text{м}); \nu > 5 \cdot 10^{19} (\text{Гц}).$

Так же, как для упругих волн, амплитуда электромагнитной волны связана с её энергией. Энергетической характеристикой волны является интенсивность (см. формулу (2.4)), поэтому волны с разной амплитудой имеют разную интенсивность. В случае видимого света увеличение амплитуды волны соответствует увеличению субъективно воспринимаемой яркости света.

### Свойства электромагнитных волн

Теоретический вывод о распространении электромагнитного поля в виде волн следует из уравнений Максвелла (см. Основы физики. Ч. 1. табл. 3.3).

- Электромагнитные волны – поперечные волны, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лежат в плоскостях, перпендикулярных к скорости волны в данной точке поля.

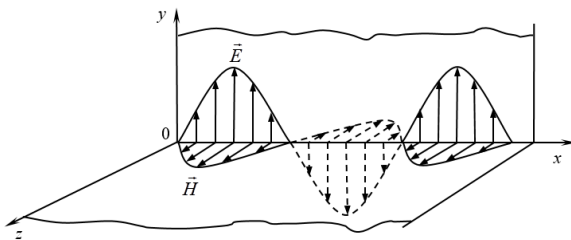


Рис. 2.5

- Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему (см. рис. 2.5).

- Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются в одной фазе: они одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в ноль.

- Амплитудные значения напряжённостей электрического и магнитных полей связаны соотношением:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu \mu_0} H. \quad (2.6)$$

- Электромагнитные волны переносят энергию, при этом происходят взаимные превращения энергии электрического поля и энергии магнитного поля.

## 2.4. Общие законы и соотношения при описании волновых процессов

В общем случае распространение волн в однородной изотропной среде подчиняется волновому уравнению

$$\Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \text{ или } \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

где  $v$  – фазовая скорость;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа.

Для плоской волны уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

Решением дифференциального уравнения (2.8) является *уравнение плоской монохроматической волны*, которое можно записать несколькими способами:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right], \\ \xi(x, t) &= A \cos (\omega t - kx + \varphi_0), \\ \xi(x, t) &= A \cos \left[ \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

где  $A$  – некоторая постоянная амплитуда волнового процесса, определяемая параметрами системы, частотой колебаний и амплитудой возмущающей силы;  $\omega$  – круговая (циклическая) частота волнового процесса;  $T$  – период гармонической волны;  $\nu$  – частота;  $k$  – волновое число;  $\lambda$  – длина волны;  $v$  – скорость распространения волны;  $\varphi_0$  – начальная фаза волнового процесса, определяемая в гармонической волне закономерностью воздействия внешнего возмущения.

Амплитуда колебания  $A = \text{const}$ , если энергия волны не поглощается средой.

Параметр  $\xi$  в различных физических системах имеет разный смысл, например: для поверхностных волн  $\xi$  – это координата точек поверхности жидкости относительно положения равновесия; в звуковых волнах, распространяющихся в газообразной среде,  $\xi$  – это отклонение плотности, концентрации молекул или давления газа от соответствующих равновесных значений. В электромагнитной волне  $\xi$  описывает изменения напряжённости электрического поля.

*Расчёт разности фаз колебаний*, происходящих в двух точках, расстояние между которыми  $\Delta x = x_2 - x_1$ :

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda}. \quad (2.10)$$

*Зависимость скорости распространения волн от параметров среды*

*В идеальном газе* скорость распространения упругих волн определяется как

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}. \quad (2.11)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты для данного газа;  $R$  – газовая постоянная;  $T$  – абсолютная температура газа;  $M$  – молярная масса газа.

*В твёрдых телах*, имеющих плотность  $\rho$ :

$$\begin{aligned}
& - \text{ скорость поперечных волн } v = \sqrt{\frac{N}{\rho}}; \\
& - \text{ скорость продольных волн } v = \sqrt{\frac{Q}{\rho}}, \quad (2.12)
\end{aligned}$$

где  $N$  – модуль сдвига;  $Q$  – модуль всестороннего сжатия.

*Примечание:* В твёрдых телах распространяются как поперечные, так и продольные волны с разными скоростями. На этом основан способ определения эпицентра землетрясений.

*Фазовая скорость* электромагнитной волны (в том числе, света):

$$\begin{aligned}
& - \text{ в вакууме } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}; \\
& - \text{ в среде } v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\varepsilon$  и  $\mu$  – соответственно, электрическая и магнитная проницаемость среды.

*Примечание:* Фазовая скорость электромагнитных волн в вакууме  $c$  не зависит от частоты.

*Абсолютный показатель преломления вещества ( $n$ )* – физическая величина, равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме к их скорости в среде.

$$n = \frac{c}{v}. \quad (2.14)$$

### *Расчёт энергии и плотности энергии волн*

Если в некотором объёме упругой среды распространяется волна с амплитудой  $A$  и циклической частотой  $\omega$ , то в этом объёме сосредоточена *средняя энергия*, равная

$$W = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2, \quad (2.15)$$

где  $m$  – масса выделенного объёма среды.

Среднее по времени значение объёмной плотности энергии (т. е. энергии, сосредоточенной в единице объёма) будет

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \quad (2.16)$$

где  $\rho$  – плотность среды.

Объёмная плотность энергии электромагнитного поля в изотропной среде в произвольный момент времени равна

$$w = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 H^2}{2}, \quad (2.17)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;  $E$  и  $H$  – значения напряжённостей электрического и магнитного поля, изменяющиеся с течением времени в соответствии с уравнениями (2.5).

Учитывая соотношение между модулями векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в электромагнитной волне  $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu \mu_0} H$  (см. формулу (2.6)), замечаем, что энергия распределяется поровну между электрическим и магнитным полем, тогда объёмная плотность энергии может быть записана в виде

$$w = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 = \mu \mu_0 H^2 = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} E H = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{c} E H. \quad (2.18)$$

Вектор Умова – Пойнтинга ( $(\vec{P})$  – плотность потока энергии) для электромагнитной волны

$$\vec{P} = [\vec{E} \vec{H}]. \quad (2.19)$$

Модуль вектора Умова – Пойнтинга равен энергии переносимой электромагнитной волной за единицу времени, через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, а его направление совпадает с направлением скорости распространения волны.



*Общие принципы, лежащие в основе описания  
процесса распространения волн в пространстве*

**Принцип Ферма:** Свет распространяется из одной точки в другую по такому пути, оптическая длина которого экстремальна, т. е. она является либо минимальной из всех возможных, либо максимальной.

**Принцип суперпозиции:** При распространении в среде нескольких волн, колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Волны накладываются друг на друга, не возмущая и не искажая друг друга.

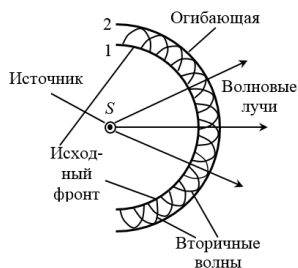
**Принцип Гюйгенса:** Каждая точка среды, до которой дошло возмущение, является источником вторичных сферических волн, огибающая фронтов вторичных волн является фронтом результирующей волны.

**Принцип Френеля:** Волна, возбуждаемая каким-либо источником, может быть представлена, как результат суперпозиции когерентных вторичных волн.

## **2.5. Явления, возникающие при разных условиях распространения волн**

### **2.5.1. Распространение волн в однородной среде**

Воспользуемся принципом Гюйгенса для того, чтобы выяснить особенности распространения волн в однородной среде. Этот принцип позволяет с помощью простых геометрических построений находить волновую поверхность в любой момент времени по известной вол-



**Рис. 2.6**

новой поверхности в предшествующий момент. Например, сферическая волна распространяется в изотропной однородной среде, при этом скорость волны одинакова по всем направлениям во всех точках.

Пусть в момент времени  $t$  фронт волны находится в положении  $l$  (см. рис. 2.6). Для нахождения фронта волны через время  $\Delta t$  из каждой точки фронта  $l$  построим сферические волны одинаковых радиусов  $R = v \cdot \Delta t$ , где скорость распространения волн  $v = \text{const}$ , т. к. среда однородная и изотропная. Огибающая этих элементарных волн (линия 2) определяет новое положения фронта волны. Огибающей поверхностью этих волн является сфера большего радиуса, следовательно, сферический волновой фронт порождает новый сферический фронт. Направление распространения волны в каждой точке перпендикулярно волновому фронту, поэтому волновые лучи в данном случае представляют собой прямые линии, радиально расходящиеся от источника. В этом смысле волна распространяется прямолинейно.

**Закон прямолинейного распространения волн:** В однородной среде фронт волны остаётся геометрически подобным себе, а лучи представляют собой прямые линии.

### 2.5.2. Распространение волн в неоднородной среде

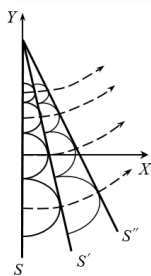


Рис. 2.7

Воспользуемся принципом Гюйгенса, чтобы выяснить особенности распространения волн в неоднородной среде. Пусть плотность среды возрастает в направлении оси  $Y$  таким образом, что скорость распространения волн  $\vec{v}$  уменьшается по линейному закону. Если в момент времени  $t$  волновая

поверхность  $S$  представляет собой плоскость  $X = 0$ , то спустя малый промежуток времени в момент времени  $t + \Delta t$ , эта волновая поверхность, как видно из рис. 2.7, поворачивается и занимает новое положение  $S'$ . Спустя следующий малый промежуток времени она занимает положение  $S''$ .

|| Таким образом, *при распространении волн в неоднородной среде фронт волны не остаётся геометрически подобен себе: лучи представляют собой кривые линии.*

### 2.5.3. Распространение волн при переходе из одной среды в другую

Воспользуемся принципом Гюйгенса, чтобы вывести закон отражения волн. Рассмотрим отражение плоской волны. На рис. 2.8:  $MN$  – отражающая поверхность; прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  – два луча падающей плоской волны (они параллельны друг другу);  $AC$  – волновой фронт падающей волны. Угол  $\alpha$  между падающим лучом и перпендикуляром к отражающей поверхности в точке падения называют *углом падения*.

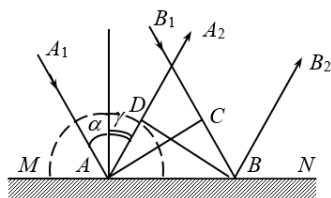


Рис. 2.8

Различные участки волновой поверхности  $AC$  достигают отражающей границы не одновременно. Через время  $\Delta t$ , когда волна достигнет точки  $B$  и в этой точке начнется возбуждение колебаний, вторичная волна с центром в точке  $A$  уже будет представлять собой полусферу радиусом  $r = AD = v\Delta t = CB$ .

Огибающей вторичных волн через время  $\Delta t$  является плоскость  $DB$ , касательная к сферическим поверхностям. Она представляет собой волновой фронт отражённой волны. Отражённые лучи  $AA_2$  и  $BB_2$  перпендикулярны волновой

поверхности  $DB$ . Угол  $\gamma$  между перпендикуляром к отражающей поверхности и отражённым лучом называют *углом отражения*.

Так как  $AD = CB$  и треугольники  $ADB$  и  $ACB$  – прямоугольные, то  $\angle DBA = \angle CAB$ . Из рис. 2.8:  $\alpha = \angle CAB$  и  $\gamma = \angle DBA$ .

*Закон отражения света:*

- угол отражения равен углу падения:  $\alpha = \gamma$ ;
- падающий луч, луч отражённый и перпендикуляр, восстановленный в точке падения, лежат в одной плоскости.

Для решения задачи о преломлении света воспользуемся принципом Ферма, согласно которому, свет распространяется между двумя точками по пути, для прохождения которого необходимо наименьшее время.

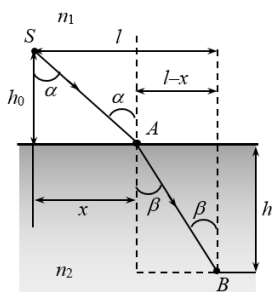


Рис. 2.9

Луч от источника света  $S$ , расположенного в среде с показателем преломления  $n_1$  идёт до точки  $B$ , расположенной в среде с показателем преломления  $n_2$  за границей раздела (см. рис. 2.9).

В каждой среде кратчайшим путём идут прямые  $SA$  и  $AB$ . Точку  $A$  охарактеризуем расстоянием  $x$  от перпендикуляра, опущенного из источника на границу раздела. Определим время, затраченное на прохождение пути  $SAB$ :

$$\tau = \frac{SA}{v_1} + \frac{AB}{v_2} = \frac{\sqrt{h_0^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h^2 + (L - x)^2}}{v_2}.$$

Для нахождения минимума найдём первую производную от  $\tau$  по  $x$  и приравняем её к нулю:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{2x}{2v_1\sqrt{h_0^2 + x^2}} - \frac{2(l-x)l}{2v_2\sqrt{h^2 + (l-x)^2}} = \frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{\sin \beta}{v_2} = 0.$$

**Закон преломления:** Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных двух сред, численно равная отношению скоростей распространения волн в этих средах или обратному отношению их показателей преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.20)$$

При изменении угла падения изменяется и угол преломления. Если свет идёт из среды оптически менее плотной в более плотную среду ( $n_2 > n_1$ ), то угол преломления всегда меньше угла падения:  $\beta < \alpha$ . Луч света, направленный перпендикулярно к границе раздела двух сред ( $\alpha = 0$ ), проходит из одной среды в другую без преломления ( $\beta = 0$ ).

При переходе света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную,  $n_1 > n_2$ , из закона (2.20) следует, что  $\beta > \alpha$ , т. е. преломленный луч удаляется от нормали. При некотором значении угла падения  $\alpha_{np}$  угол преломления достигает значения  $\beta = \pi/2$ , следовательно, при  $\alpha > \alpha_{np}$  весь падающий свет отражается, преломленный луч исчезает. При этом интенсивность падающего луча равна интенсивности отраженного луча, интенсивность преломленного луча равна нулю. Это явление называется *полным отражением*. Угол падения (см. рис. 2.10), которому соответствует угол преломления  $90^\circ$ , называется *предельным углом*, величина предельного угла определяется из соотношения

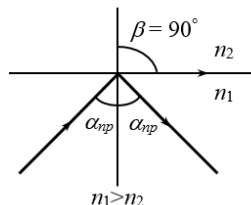


Рис. 2.10

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.21)$$

Важнейшим техническим применением закона полного внутреннего отражения является волоконная оптика (световоды). Стекловолоконное волокно цилиндрической формы, покрыто оболочкой из прозрачного материала с показателем преломления меньше чем у волокна. За счет многократного полного отражения свет может быть направлен по изогнутому пути.

### 2.5.4. Интерференция волн

Явление интерференции возникает при наложении двух или нескольких *когерентных волн*, т. е. волн, имеющих

- колебания одинакового направления;
- одинаковую частоту;
- не зависящую от времени разность фаз.

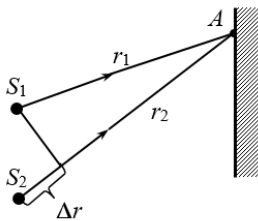


Рис. 2.11

В качестве теоретической основы для рассмотрения явления воспользуемся *принципом суперпозиции*, согласно которому волны, налагаясь друг на друга, не возмущают и не искажают друг друга.

Пусть две когерентные волны (см. рис. 2.11) возбуждают в точке A колебания одинакового направления:  $\xi_1 = A \cos(\omega t - \frac{\omega r_1}{v})$ ,  $\xi_2 = A \cos(\omega t - \frac{\omega r_2}{v})$  где  $r_1$  и  $r_2$  – расстояния от источников волн до точки, в которой рассматривается их наложение. Складывая эти уравнения и преобразуя сумму косинусов в произведение, получим уравнение результирующего колебания в виде

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega(r_2 - r_1)}{2v}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\omega(r_2 + r_1)}{2v}\right),$$

где  $\Delta r = (r_2 - r_1)$  – разность хода волн, а роль амплитуды результирующего колебания выполняет выражение

$$A_{\text{рез}} = 2A \cos\left(\frac{\omega(r_2 - r_1)}{2\nu}\right). \quad (2.22)$$

На основании уравнения (2.22) можно сделать вывод, что амплитуда результирующего колебания, является функцией разности хода волн  $A_{\text{рез}} = f(r_2 - r_1) = f(\Delta r)$ . Следовательно, интенсивность волн в разных точках окажется разной. Интерференционная картина будет представлять собой чередование мест с усиленной и ослабленной интенсивностью колебаний.

Максимумы интенсивности будут возникать в тех точках, где  $A_{\text{рез}} = A^{\text{max}}$ , т. е. при  $\cos \frac{\omega \Delta r}{2\nu} = \pm 1$ . Откуда  $\frac{\omega \Delta r}{2\nu} = k\pi$ , с учётом выражений (1.3) и (2.2) получим

|| условие интерференционного максимума:

$$\Delta r = k\lambda = k \frac{\lambda}{2}, (k = 0, 1, \pm 2, \dots). \quad (2.23)$$

|| Максимум в интерференционной картине возникает в тех точках, для которых разность хода волн составляет чётное число длин полуволн.

Минимум интенсивности будет возникать в тех точках, где  $A_{\text{рез}} = 0$ , т. е. при  $\cos \frac{\omega \Delta r}{2\nu} = 0$ . Откуда  $\frac{\omega \Delta r}{2\nu} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ , с учётом выражений (1.3) и (2.2) получим

|| условие интерференционного минимума:

$$\Delta r = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, (k = 0, 1, \pm 2, \dots). \quad (2.24)$$

|| Минимум в интерференционной картине возникает в тех точках, для которых разность хода волн составляет нечётное число длин полуволн.

Требование когерентности волн необходимо для того, чтобы интерференционная картина была устойчива во времени, т. е., чтобы амплитуда результирующего колебания, определяемая уравнением (2.22), не зависела от времени.

При интерференции волн не происходит сложения их энергий. Наличие минимума в точке наблюдения означает, что в эту точку не поступает энергия. Наличие максимума в некоторой точке означает, что происходит увеличение энергии. Другими словами, сущность явления интерференция волн сводится к перераспределению энергии колебаний между различными близкорасположенными точками среды. Это не противоречит закону сохранения энергии, потому что, в среднем, для большой области пространства энергия результирующей волны равна сумме энергий интерферирующих волн.

Рассмотрим частный случай интерференции волн, возникающей при наложении двух бегущих синусоидальных волн, распространяющихся навстречу друг другу вдоль оси  $X$  и имеющих одинаковые амплитуды и частоты, например, падающей и отраженной (см. рис. 2.12). Запишем уравнения в виде

$$\begin{aligned}\xi_1(x, t) &= A \cos \left[ \left( \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] \\ \xi_2(x, t) &= A \cos \left[ \left( \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]\end{aligned}\quad (2.25)$$

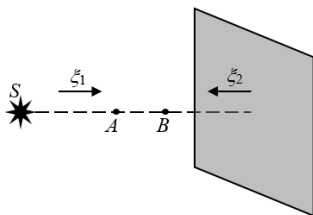


Рис. 2.12

Волны  $\xi_1$  и  $\xi_2$  имеют одинаковые амплитуды, а значит, переносят одинаковую энергию в противоположных направлениях. В результирующей волне перенос энергии в направлении



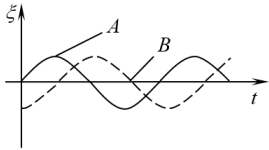
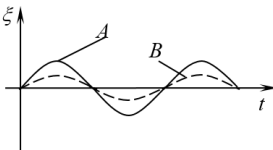
оси  $x$  отсутствует, поэтому результат интерференции в этом случае принято называть *стоячей волной*. Уравнение результирующей волны

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos \omega t, \quad (2.26)$$

где  $A^* = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$  – амплитуда стоячей волны.

Таблица 2.1

**Сравнение характеристик  
бегущей и стоячей волны для разных точек среды**

<i>Бегущая волна</i>	<i>Стоячая волна</i>
$\xi = A \cos\left[\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$	$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \cos \omega t$
$A$ – амплитуда не зависит от времени и координат, во всех точках амплитуда колебаний одинакова	$A^* = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ – амплитуда зависит от координаты $x$ , т. е. в разных точках амплитуды разные. Существуют точки, где $A^* = 0$ – это <i>узлы</i> и точки, где $A^* = 2A$ – это <i>пучности</i>
$\varphi = \left[\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$ – фаза зависит от координаты $x$ , следовательно, колебания в соседних точках отличаются по фазе	$\varphi = \omega t$ – во всех точках между двумя узлами колебания происходят в одинаковых фазах. При переходе через узел фаза колебаний меняется на противоположную
<i>Графики колебаний в соседних точках среды</i>	
 <p><i>Рис. 2.13</i></p>	 <p><i>Рис. 2.14</i></p>

Координаты пучностей в стоячей волне, находятся из условия  $\left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right| = 1$ , или  $\frac{2\pi}{\lambda}x = k\pi$ , откуда  $x = k \frac{\lambda}{2}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$

Тогда расстояние между двумя соседними пучностями  $l = x_{k+1} - x_k = (k+1)\frac{\lambda}{2} - k\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$ . Аналогично можно доказать, что расстояние между двумя соседними узлами в стоячей волне равно половине длины бегущей волны.

### 2.5.5. Особенности интерференции световых волн

*Интерференция света* – физическое явление, суть которого заключается в том, что при наложении световых потоков при определённых условиях не происходит увеличения интенсивности света до величины, равной сумме интенсивностей накладывающихся потоков, а наблюдается перераспределение интенсивности светового потока, в результате чего возникает интерференционная картина – чередующиеся светлые и тёмные участки.

Устойчивая интерференционная картина наблюдается только при наложении когерентных световых волн. Два независимых источника света не могут быть когерентными, т. к. свет излучается отдельными атомами, переходящими из возбужденного состояния в невозбуждённое случайным образом, в результате чего разность фаз не остаётся постоянной во времени.

#### *Способы получения когерентных волн в оптике*

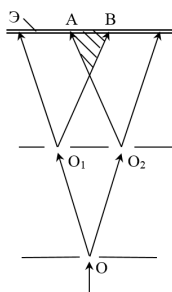


Рис. 2.15

Для получения когерентных световых волн применяют метод разделения фронта волны, излучаемой одним источником, на две части, которые после прохождения разных оптических путей накладываются друг на друга и наблюдается интерференционная картина.

*Метод Юнга.* Источником света является ярко освещенная щель  $O$  (см. рис. 2.15), от

которой световая волна попадает на две равноудаленные щели  $O_1$  и  $O_2$ , параллельные щели  $O$ . Щели  $O_1$  и  $O_2$  становятся источниками когерентных волн, которые интерферируют в области  $AB$  (заштрихована на рисунке), на экране  $\mathcal{E}$  наблюдается интерференционная картина.

**Зеркала Френеля.** Два плоских зеркала расположены под малым углом  $\alpha$  друг к другу. Свет от одного источника  $S$  падает на зеркала, в результате в них возникают два изображения источника, которые являются мнимыми когерентными источниками двух пучков. Эти пучки интерферируют, создавая на экране интерференционную картину (см. рис. 2.16).

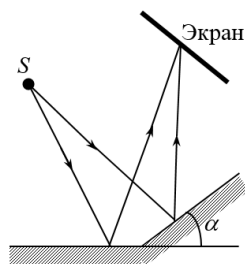


Рис. 2.16

**Бипризма Френеля:** Имеется система двух одинаковых призм с малыми преломляющими углами. Световой пучок, исходящий от источника  $O$ , преломляется в обеих призмах. В результате возникает два пучка, идущие от двух мнимых источников  $O_1$  и  $O_2$ , которые при наложении создают интерференцию (см. рис. 2.17).

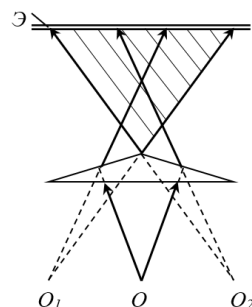


Рис. 2.17

**Интерференция в тонких плёнках:** Интерферируют два луча: луч, отражённый от поверхности плёнки, и луч, прошедший сквозь неё и отражённый от поверхности раздела плёнки и воздуха (см. рис. 2.18).

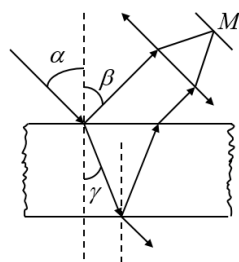


Рис. 2.18

Оптическая разность хода световых волн, возникающая при отражении монохроматического света длиной волны  $\lambda$  от тонкой плёнки,

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \pm \frac{\lambda}{2},$$

или 
$$\Delta = 2dn \cos \gamma \pm \frac{\lambda}{2}, \quad (2.27)$$

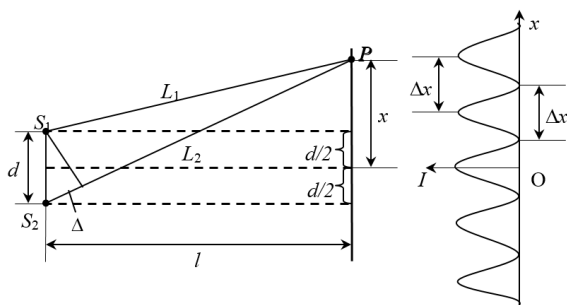
где  $d$  – толщина плёнки;  $n$  – показатель преломления плёнки;  $\alpha$  – угол падения;  $\gamma$  – угол преломления света в плёнке.

Потеря полуволны  $\lambda/2$  происходит при отражении от более плотной среды, возникает вследствие скачкообразного изменения фазы волны на  $\pi$  в момент отражения.

### *Геометрическое условие наблюдения интерференции света*

Рассмотрим интерференционную картину и её основные характеристики на примере опыта Юнга. Два источника света  $S_1$  и  $S_2$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга. При освещении монохроматическим светом интерференционная картина на экране представлена чередующимися светлыми и темными полосами, расположенными на равных расстояниях друг от друга.

Оптическая разность хода двух световых волн определяется на основании рис. 2.19:



**Рис. 2.19**

$$\Delta = L_2 - L_1 \approx \frac{xd}{l}. \quad (2.28)$$

*Ширина интерференционной полосы* – расстояние между двумя соседними максимумами – определяется из уравнения (2.28) с учётом условия образования максимумов (2.23):

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda, \quad (2.29)$$

где  $l$  – расстояние от источников до экрана;  $d$  – расстояние между источниками.

Для наблюдения интерференции невооруженным глазом необходимо, чтобы  $\Delta x \approx 1$  мм, для видимого света  $\lambda \approx 10^{-7}$  м, тогда, на основании равенства (2.29),  $l$  должно быть больше  $d$  в  $10^4$  раз.

При увеличении расстояния между источниками отдельные полосы сближаются и становятся неразличимыми.

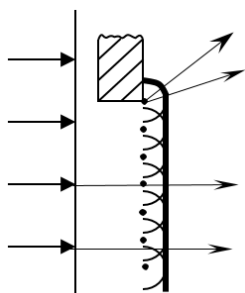
*Геометрическое условие наблюдения интерференционной картины:* Расстояние от источников когерентных волн до экрана должно быть много больше расстояния между источниками ( $l \gg d$ ).

### *Интерференция в белом свете*

В реальных условиях обычно используют белый свет, представляющий собой непрерывный набор длин волн от 0,39 мкм до 0,75 мкм. Интерференционные максимумы для каждой длины волны, т. е. для разных цветов, согласно равенству (2.29), будут смещены, относительно друг друга и иметь вид радужных полос. Для  $k = 0$  максимумы длин волн совпадают, и в середине экрана будет наблюдаться белая полоса, по обе стороны которой симметрично расположатся спектрально окрашенные полосы максимумов первого, второго порядков и т. д. (ближе к белой полосе будут находиться зоны фиолетового цвета, дальше – красного).

**2.5.6. Распространение волн в среде  
с резкими неоднородностями  
(при наличии ограниченных по размерам непрозрачных  
для волн препятствий).  
Явление дифракции**

Рассмотрим плоскую волну, падающую на плоскую стену с прямыми краями (см. рис. 2.20). Для простоты будем считать, что падающий на стену участок волны полностью поглощается, так что отраженной волны нет. На рис. 2.20 показаны построенные по принципу Гюйгенса поверхности позади препятствия. Видно, что вдали от края препятствия фронт волны остаётся плоским и выполняется закон прямолинейного распространения волн, а вблизи края фронт волны искривляется и волны огибают препятствие, заходя в область тени. Кроме того, опыт показывает, что в области искривления фронта волны интенсивность волны в разных точках фронта не одинакова: возникает картина из чередующихся максимумов и минимумов.



*Рис. 2.20*

*Дифракцией* называется совокупность явлений, наблюдаемых вблизи краев непрозрачных препятствий и связанных:

- с искривлением фронта волны вблизи препятствия;
- с нарушением закона прямолинейного распространения волн (загибание волн за края препятствия);
- с перераспределением энергии

в области искривления фронта волны.

Последний эффект (перераспределения энергии по фронту волны) не вытекает из принципа Гюйгенса, а объяс-

няется на основе принципа Френеля как результат интерференции множества вторичных когерентных волн.

### **2.5.7. Особенности дифракции световых волн**

Рассмотрим более подробно дифракцию световых волн. Используем принцип Френеля и, разработанный на его основе, метод зон Френеля для расчёта положений максимумов и минимумов в дифракционной картине при прохождении плоской волны через узкую щель и через дифракционную решётку.

#### *Метод зон Френеля*

Для расчёта результата интерференции вторичных волн необходимо:

1. Разделить фронт волны на зоны так, чтобы разность хода волн от соседних зон составляла  $\lambda/2$  (при этом волны, пришедшие от соседних зон в точку наблюдения, будут ослаблять друг друга).
2. Сосчитать число зон уместившихся на открытом фронте волны. Если число зон чётное, то в данной точке будет наблюдаться минимум (тёмное пятно), а если число зон нечётное, то – максимум интенсивности (светлое пятно).

#### *Дифракция на щели в параллельных лучах*

Пусть монохроматическая волна падает нормально плоскости бесконечно длинной узкой щели, шириной  $b$  (см. рис. 2.21). Разность хода между лучами 1 и 2 в направлении  $\varphi$ , определяется выражением  $\Delta = BC = b \sin \varphi$ .

Разобьём волновую поверхность на участке щели на зоны Френеля, имеющие вид полос. Ширина каждой полосы выбирается так, чтобы разность хода от краёв этих зон была равна  $\lambda/2$ , т. е. всего на ширине щели уложится  $\frac{\Delta}{\lambda/2}$  зон. Плоскость щели совпадает с фронтом волны, т. к. свет на щель

падает нормально, поэтому все точки фронта в плоскости щели будут колебаться синфазно. Число зон Френеля укладывающихся на ширине щели, зависит от угла  $\varphi$ .

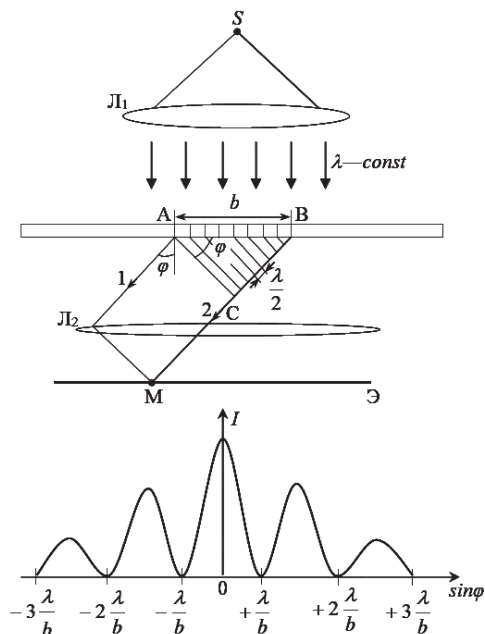


Рис. 2.21

*Условие минимума при дифракции Френеля:* Если число зон Френеля чётное:

$$\frac{\Delta}{\lambda/2} = \pm 2m, \text{ или } b \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, m = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.30)$$

то в точке  $M$  наблюдается дифракционный минимум.

*Условие максимума:* Если число зон Френеля нечётное, то

$$\frac{\Delta}{\lambda/2} = \pm (2m + 1), \text{ или } b \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

При  $\varphi' = 0, \Delta = 0$  в щели укладывается одна зона Френеля и, следовательно, в точке  $M$  – главный (центральный) максимум нулевого порядка.



Сужение щели приводит к уширению главного максимума и уменьшению его яркости (то же и с другими максимумами). При уширении щели ( $b > \lambda$ ) максимумы будут ярче, но дифракционные полосы становятся уже, а число самих полос – больше. При  $b \gg \lambda$  в центре получается резкое изображение источника света, т. е. имеет место прямолинейное распространение света.

При падении белого света будет разложение на его составляющие. При этом фиолетовый свет будет отклоняться меньше, синий – больше, красный – максимально и т. д. Главный максимум в этом случае будет белого цвета.

### *Дифракционная решётка*

*Дифракционная решётка* – оптический прибор, предназначенный для анализа спектрального состава оптического излучения. Она представляет собой строго периодическую структуру, состоящую из  $N$  одинаковых щелей шириной  $b$  в непрозрачном экране, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние  $a$ . Величина  $d = a + b$  называется периодом решётки (см. рис. 2.22).

В результате совместного действия всех щелей происходит многолучевая интерференция дифрагированных лучей света, идущих от всех щелей. Для двух соседних щелей разность хода лучей

$$\Delta = d \sin \varphi = (a + b) \sin \varphi, \quad (2.32)$$

будет одинакова в данном направлении  $\varphi$  для дифракционной решётки.

Условие главных максимумов

$$d \sin \varphi = \pm 2n \frac{\lambda}{2} = \pm n \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

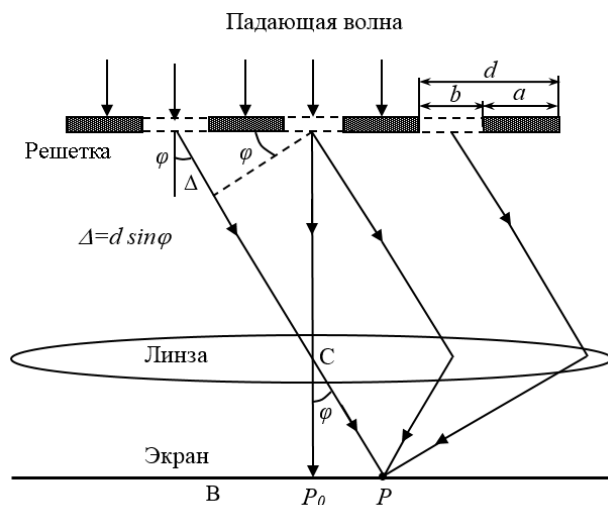


Рис. 2.22

Число  $n$  обозначает порядок главных максимумов. Максимум нулевого порядка только один, максимумов 1-го, 2-го и прочих порядков – по два (см. рис. 2.23).

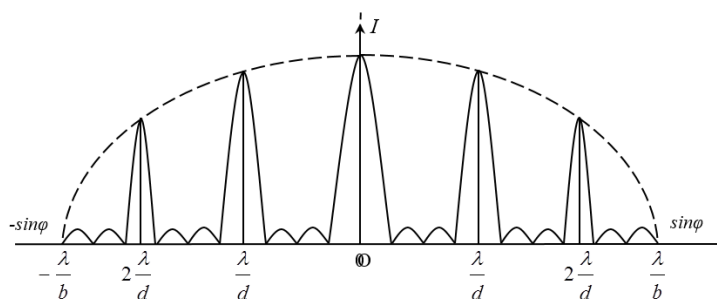


Рис. 2.23

Если решётка освещена монохроматическим светом, то дифракционная картина имеет вид ярких и узких полос (главных максимумов), имеющих одинаковый цвет и разделённых тёмными широкими промежутками. Если дифрак-

ция наблюдается в белом свете, то центральный максимум ( $m = 0, j = 0$ ) будет белым, остальные максимумы разложатся в разноцветный спектр по длинам волн, фиолетовый конец которого обращён к центру дифракционной картины, а красный – наружу.

## **2.5.8. Выделение колебаний одного направления в волне.**

### ***Явление поляризации***

В поперечных волнах колебания происходят в плоскости перпендикулярной направлению распространения волны. Однако, в этой плоскости могут существовать различные направления колебаний.

*Неполяризованной волной* называется волна, в которой все направления колебаний равновероятны.

*Поляризованной волной* называется такая поперечная волна, в которой колебания происходят в одном направлении.

Можно создать специальные устройства или особые условия при распространении волн в среде, при которых неполяризованная волна превращается в поляризованную. Такое явление называется *поляризацией*.

*Поляризатор* – устройство, выделяющее в волне колебания одного направления.

*Плоскость поляризации* – это направление, в котором остаются колебания после прохождения поляризатора.

Рассмотрим поляризацию на примере волны, бегущей по резиновому шнурку, который можно заставить колебаться в вертикальной плоскости (см. рис. 2.24 а) или в горизонтальной плоскости (рис. 2.24 б). И в том и в другом случае волна оказывается *плоскополяризованной*.

Если на пути волны поставить какое-нибудь препятствие с тонкой вертикальной щелью, то вертикально поляризованная волна пройдёт через него, а горизонтально поляризованная волна препятствие не преодолеет. Если бы

щель в препятствии была горизонтальной, то оно оказалось бы непреодолимым для вертикально поляризованных волн. Щель пропустит только те колебания, которые происходят вдоль неё.

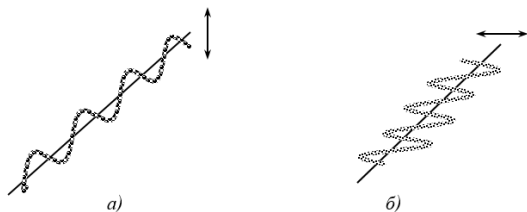


Рис. 2.24

Устройство, выделяющее колебания, происходящие в одном направлении, называется *поляризатором*. Устройство, позволяющее определить плоскость поляризации (вторая щель) называется *анализатором*.

Если на пути таких волн поставить оба поляризатора, плоскости поляризации которых перпендикулярны, то через них не сможет пройти ни одна из поляризованных волн (см. рис. 2.25).



Рис. 2.25

Поляризация может существовать *только у поперечных* волн, но не у продольных. В продольных волнах колебания совершаются вдоль направления их распространения, и никакой ориентацией щели нельзя эти волны погасить.

При прохождении через поляризатор происходит изменение интенсивности волны, описываемые законами Малюса.

Если в неполяризованной волне все направления колебаний равновероятны, то 50 % интенсивности волны приходится на колебания перпендикулярные плоскости поляризации и 50 % – на колебания, лежащие в плоскости поляризации. Следовательно, при выходе из поляризатора интенсивность волны уменьшится в два раза.

*Первый закон Малюса:* При падении неполяризованной волны на поляризатор интенсивность вышедшей волны равна половине интенсивности падающей волны:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0. \quad (2.34)$$

При падении поляризованной волны на поляризатор интенсивность вышедшей волны будет меняться в зависимости от взаимной ориентации направления колебаний в волне и плоскости поляризации поляризатора.

На рис. 2.26:  $A_0$  – амплитуда падающей волны;  $OO$  – положение плоскости поляризации поляризатора. Через поляризатор в этом случае пройдут колебания с амплитудой  $A = A_0 \cdot \cos \alpha$ .

Учитывая, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды  $I \approx A^2$ , получаем

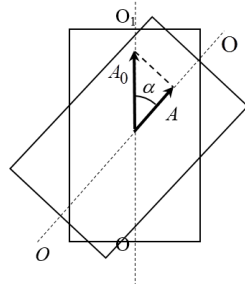


Рис. 2.26

*второй закон Малюса:* При падении поляризованной волны на поляризатор интенсивность волны на выходе из него отличается от входящей в  $\cos^2 \alpha$  раз:

$$I = I_1 \cos^2 \alpha, \quad (2.35)$$

где  $I_1$  и  $I$  – соответственно, интенсивности падающей и вышедшей из поляризатора волн;  $\alpha$  – угол между направлением колебаний в волне и направлением плоскости поляризации.

Объединённый закон Малюса: Интенсивность света прошедшего через два поляризатора равна

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha. \quad (2.36)$$

Из сформулированных законов (2.34) и (2.35) видно, что, если на поляризатор падает неполяризованная волна, то при вращении поляризатора вокруг направления луча его интенсивность не меняется. Но если падающая волна поляризована, то вращение поляризатора приводит к изменению интенсивности, причём за полный оборот интенсивность два раза принимает максимальное значение и два раза минимальное, равное нулю (если поляризатор идеальный).

### 2.5.9. Особенности поляризации световых волн

*Поляризованным* называется свет, в котором направления колебаний светового вектора каким-то образом упорядочены, т. е. сохраняются неизменными в пространстве или изменяются по определённому закону. Так, если в результате каких-либо внешних воздействий появляется преимущественное (но не исключительное!) направление колебаний вектора  $\vec{E}$ , то имеем дело с *частично поляризованным* светом.

*Плоскополяризованный свет* – это свет, в котором вектор  $\vec{E}$  колеблется вдоль одного направления.

*Плоскость поляризации* света – плоскость, содержащая вектор  $\vec{E}$  и вектор фазовой скорости  $\vec{v}$  волны плоскополяризованного света.

Эллиптически поляризованный свет – это свет, в котором вектор  $\vec{E}$  описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{v}$ .

Естественный свет является результатом наложения множества электромагнитных волн, излучаемых различными атомами, ориентированными в пространстве хаотически. Поэтому световой вектор  $\vec{E}$  в естественном свете имеет различные направления. В целом, свет характеризуется средней интенсивностью  $I$  с равномерным распределением вектора  $\vec{E}$  в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны:  $I \sim E^2$ .

Свет характеризуется *степенью поляризации*

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (2.37)$$

где  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$  – максимальная и минимальная интенсивности поляризованного света, соответствующие значениям  $\vec{E}_{\max}$  и  $\vec{E}_{\min}$  эллиптически поляризованного света.

### *Способы получения поляризованного света*

#### *1. Прохождение света через анизотропные среды.*

Естественный свет преобразуется в поляризованный с помощью поляризаторов, в качестве которых используются среды, анизотропные в отношении колебаний вектора  $\vec{E}$ . Анизотропия проявляется, в частности, в том, что скорость распространения света в разных направлениях различна.

При прохождении света через анизотропные среды возникает *двойное лучепреломление* – явление, при котором луч, падающий на границу кристалла, раздваивается на два луча. Один из них называется *обыкновенный*, он подчиняется законам геометрической оптики (обозначается  $o$ ), а другой *необыкновенный*: он не подчиняется законам геометрической оптики и не лежит в плоскости падения (обозначается  $e$ ) (см.

рис. 2.27). Оба луча – обыкновенный и необыкновенный – плоско поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

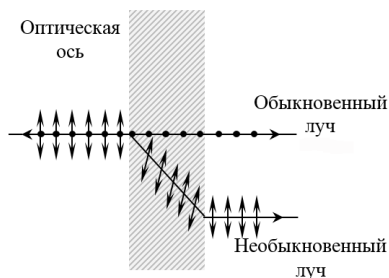


Рис. 2.27

В некоторых кристаллах (например, в турмалине) один из лучей поглощается сильнее другого. Это явление называется *дихроизм*.

Существуют естественные прозрачные кристаллы, обладающие такими свойствами, например,

турмалин, исландский шпат. Можно создать *искусственную анизотропию среды*.

Оптическая анизотропия среды создаётся в естественно изотропных веществах в следующих случаях:

- 1) механическая деформация тела в виде одностороннего растения или сжатия стекла, изотропных кристаллов кубической формы и др.;
- 2) воздействие электрического поля на прозрачные жидкости, газы, аморфные тела (эффект Керра);
- 3) воздействие магнитного поля на прозрачные жидкости, коллоиды, стекла (эффект Коттона – Мутона).

Во всех этих случаях вещество приобретает свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает с направлением деформации, электрического или магнитного поля.

Мерой оптической анизотропии является разность показателей преломления  $\Delta n$  обыкновенного  $n_o$  и необыкновенного  $n_e$  лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси. Величина  $\Delta n$  определяется:



– для механической деформации

$$\Delta n = n_0 - n_e = k_1 \sigma, \quad (2.38)$$

– для электрического поля

$$\Delta n = n_0 - n_e = k_2 E^2, \quad (2.39)$$

– для магнитного поля

$$\Delta n = n_0 - n_e = k_3 H^2, \quad (2.40)$$

здесь  $k_1, k_2, k_3$  – постоянные, зависящие от свойств вещества.

## 2. Отражение и преломление на границе двух сред.

При падении естественного света на границу раздела двух диэлектриков отражённый и преломлённый лучи всегда частично поляризуются. Однако существует такой угол падения, при котором отражённый луч оказывается полностью поляризованным.

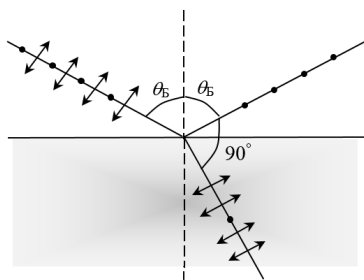


Рис. 2.28

**Закон Брюстера:** Если свет падает на границу раздела двух диэлектриков под углом  $\theta_B$ , тангенс которого равен относительному показателю преломления двух сред, то отражённый луч плоскополяризован (содержит только колебания перпендикулярные плоскости падения), а преломлённый луч поляризован максимально, но не полностью.

Угол полной поляризации, называемый *углом Брюстера* ( $\theta_B$ ), связан с показателями преломления сред по обе стороны границы их раздела соотношением:

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.41)$$

Можно доказать, что при падении света под углом Брюстера, угол между отражённым и преломленным лучами равен  $90^\circ$ .

Для света так же, как для механических волн, справедливы законы Малюса (см. законы (2.34)–(2.36)), описывающие изменение интенсивности волн в процессе поляризации.

### ***2.5.10. Некоторые явления, возникающие при взаимодействии света с веществом***

*Дисперсия волн* – явление зависимости фазовой скорости волн от их частоты. Поскольку скорость связана с показателем преломления вещества, дисперсия света представляется в виде зависимости показателя преломления от частоты или от длины волны.

Эта зависимость обнаруживается при прохождении пучка белого света, через призму из какого либо прозрачного материала. Если для лучей с разной длиной волны показатели преломления различны, то (согласно закону преломления) эти лучи будут преломляться под разными углами, в результате чего на экране, установленном за призмой, наблюдается призматический спектр – полоса, окрашенная в непрерывно чередующиеся цвета радуги: от красного до фиолетового.

*Поглощение волн* – явление уменьшения интенсивности излучения по мере распространения в веществе. Интенсивность плоской монохроматической волны  $I$  после прохождения через слой поглощающего вещества толщиной  $d$  связана с интенсивностью этой волны  $I_0$  на входе в слой законом Бугера – Ламберга:

$$I = I_0 \cdot e^{-\alpha d}, \quad (2.42)$$

где  $I_0$  и  $I$  – интенсивность плоской монохроматической световой волны на входе и выходе слоя поглощающего веще-

ства толщиной  $d$ ;  $\alpha$  – коэффициент поглощения, зависящий от длины волны, химической природы и состояния вещества и не зависящий от интенсивности света.

В гл. 3 будет продолжено рассмотрение явлений взаимодействия света с веществом, закономерности которых не могут быть объяснены на основе волновой модели света, что приводит к необходимости введения новой (корпускулярной) модели и построении на её основе новой теории света – квантовой оптики.

## 2.6. Примеры решения задач к разделу «Волновые процессы»

**Пример 1.** Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью  $v = 20$  м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях  $r_1 = 12$  м и  $r_2 = 15$  м от источника волн, колеблются с разностью фаз  $\Delta\varphi = 0,75\pi$ .

*Написать уравнение волны. Найти длину волны и смещение указанных точек в момент  $t = 1,2$  с, если амплитуда колебаний  $A = 0,1$  м.*

**Решение.** Уравнение плоской волны имеет вид

$$x = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \right], \quad (1)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний;  $v$  – скорость волны;  $\omega$  – циклическая частота, значение которой надо найти. Так как  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ( $T = \frac{\lambda}{v}$  – период колебаний), то

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}. \quad (2)$$

Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны  $\lambda$ , колеблются с разностью фаз, равной  $2\pi$ ; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии  $\Delta r$ , колеблются с разностью фаз, равной

$$\Delta\varphi = \Delta r \frac{2\pi}{\lambda} = (r_2 - r_1) \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Решая это равенство относительно  $\lambda$ , получаем

$$\lambda = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\Delta\varphi}. \quad (3)$$

Произведём вычисления: Подставив числовые значения величин, входящих в выражение (3), и выполнив арифметические действия, получим

$$\lambda = 2\pi \frac{15 - 12}{0,75\pi} = 8 \text{ (м)}.$$

Циклическая частота колебаний волны, согласно выражению (2), равна

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 20}{8} = 5\pi \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

С учётом произведённых вычислений уравнение волны будет иметь вид

$$x = 0,1 \cos \left[ 5\pi \left( t - \frac{r}{20} \right) \right].$$

Чтобы найти смещение  $x$  указанных точек, достаточно в уравнение (1) подставить значения  $t$  и  $r$ :

$$x_1 = 0,1 \cos[5\pi (1,2 - 12/20)] = 0,1 \cos 3\pi = -0,1 \text{ (м)}.$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 0,1 \cos[5\pi(1,2 - 15/20)] = 0,1 \cos 2,25\pi = \\ &= 0,1 \cos 0,25\pi = 0,071 \text{ (м)} = 7,1 \text{ (см)}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\lambda = 8 \text{ м}$ ;  $x_1 = -0,1 \text{ м}$ ;  $x_2 = 7,1 \text{ см}$ .

**Пример 2.** В незатухающей бегущей волне задана точка  $M$ , отстоящая от источника колебаний на расстоянии  $r = \lambda/2$  в направлении распространения волны. Амплитуда колебаний  $A = 0,05 \text{ м}$ . Считая в начальный момент времени смещение точки  $P$ , находящейся в источнике, максимальным, определить смещение от положения равновесия точки  $M$  для момента  $t = T/6$ , а также разность фаз колебаний точек  $M$  и  $P$ .

**Решение.** Уравнение бегущей волны имеет вид

$$x = A \sin \left[ \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (1)$$

Используя условие задачи, преобразуем это уравнение так, чтобы в него вошли длина волны  $\lambda$  и период  $T$  колебаний. Учитывая соотношения  $\omega = 2\pi/T$  и выражение  $\lambda = vT$ , получим

$$x = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{vT} \right) + \varphi_0 \right] = A \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (2)$$

Чтобы найти начальную фазу  $\varphi_0$ , воспользуемся начальными условиями задачи: если  $t = 0$ ,  $r = 0$ ,  $x = A$ . Подставляя эти значения в уравнение (2) получим  $\sin \varphi_0 = 1$ , откуда  $\varphi_0 = \pi/2$ .

Для вычисления разности фаз  $\varphi_M - \varphi_P$  колебаний точек  $M$ ,  $P$  учтём, что точки  $P$  координата  $r = 0$ . Следовательно, в любой момент  $t$  фаза точки  $P$ , т. е. аргумент синуса в (2), равна  $\frac{2\pi}{T}t$ . Тогда

$$\varphi_M - \varphi_P = \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right] - \left[ 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0 \right] = -2\pi \frac{r}{\lambda}. \quad (3)$$

Произведём вычисления, подставляя числовые значения величин  $A$ ,  $t/T$ ,  $r/\lambda$ ,  $\varphi_0$  в выражение (2) получим смещение точки  $M$ :

$$x = 0,05 \sin \left[ 2\pi \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) + \frac{\pi}{2} \right] = 0,05 \cdot 0,087 = 0,044 \text{ м.}$$

Используя выражение (3), найдём разность фаз колебаний точек  $M$  и  $P$ :

$$\varphi_M - \varphi_P = -2\pi \frac{1}{12} = -\frac{\pi}{6}.$$

Таким образом, колебания точки  $M$  отстают от колебаний источника на угол  $\pi/6$ .

**Ответ:**  $x = 0,044$  м;  $\varphi_M - \varphi_P = -\pi/6$ .

**Пример 3.** Монохроматический свет падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, находящимися на расстоянии  $d = 2,5$  мм друг от друга. На экране, расположенном за диафрагмой на расстоянии  $l = 100$  см, образуется система интерференционных полос. Куда и на какое расстояние сместятся эти полосы, если одну из щелей перекрыть стеклянной пластинкой толщиной  $h = 10$  мкм? Показатель преломления стекла  $n = 1,5$ .

**Решение.** В задаче для получения когерентных световых волн применяют метод разделения волны, с помощью диафрагмы на две части, которые, после прохождения разных оптических путей накладываются друг на друга и наблюдается интерференционная картина.

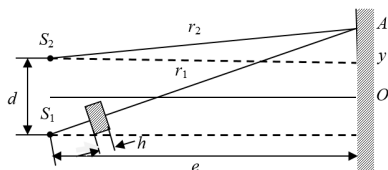


Рис. 2.29

Выполним рис. 2.29, используя условие задачи. Вначале рассмотрим интерференционную картину без стеклянной пластинки.

Пусть в точке  $A$  наблюдается максимум интерференции. Обозначим  $OA = y$ . Условие максимума интерференции точки  $A$

$$\Delta = r_2 - r_1 = k\lambda. \quad (1)$$

Из рис. 2.29 видим, что

$$r_1^2 = l^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2, \quad (2)$$

$$r_2^2 = l^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2, \quad (3)$$

$$r_1^2 - r_2^2 = l^2 + y^2 + yd + \frac{d^2}{4} - l^2 - y^2 + yd - \frac{d^2}{4} = 2yd \quad (4)$$

т. к.

$$r_1 + r_2 \cong 2l, \quad (5)$$

то  $r_1 - r_2 = \Delta = \frac{2yd}{2l} = \frac{yd}{l} = k\lambda$ . Следовательно,

$$y = \frac{k\lambda l}{d}, \quad (6)$$

где  $k$  – номер светлой полосы, который отсчитывается от точки  $O$ . Соседняя полоса будет находиться в точке

$$y_1 = \frac{(k+1)\lambda l}{d}. \quad (7)$$

Расстояние между двумя соседними полосами будет

$$\Delta y = y_1 - y_2 = \frac{\lambda l}{d}. \quad (8)$$

Определим положение  $k$ -й светлой полосы при внесении стеклянной пластинки. По сравнению, с ранее разобранным случаем, эта пластинка внесёт дополнительную разность хода, равную  $h(n-1)$ , поэтому

$$\Delta = r_1 - r_2 + h(n-1) = \frac{yd}{l} + h(n-1) = k\lambda. \quad (9)$$

Приравниваем выражение (9) к условию максимума:

$$\frac{yd}{l} + h(n-1) = k\lambda, \quad (10)$$

отсюда

$$y = \frac{k\lambda l - lh(n-1)}{d} = y'. \quad (11)$$

Координата  $y$ , соответствующая  $k$ -й полосе, уменьшилась до  $y'$ , т. е. полосы сместились в сторону перекрытой щели.

Найдём величину этого смещения, используя выражения (6) и (11):

$$\Delta y = y - y' = \frac{k\lambda l}{d} - \frac{k\lambda l - lh(n-1)}{d} = \frac{lh(n-1)}{d},$$

$$\Delta y = \frac{1 \cdot 10 \cdot 10^{-6}(1,5-1)}{0,0025} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}.$$

**Ответ:**  $\Delta y = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$

**Пример 4.** Свет с длиной волны  $\lambda = 0,55$  мкм падает нормально на поверхность стеклянного клина ( $n = 1,5$ ). В отражённом свете наблюдают систему интерференционных полос, причём расстояние между соседними тёмными полосами  $\Delta x = 0,21$  мм. Определить угол между гранями клина.

**Решение.** В данной задаче в точках 1 и 2 интерферируют

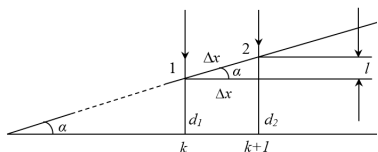


Рис. 2.30

лучи, отраженные от двух поверхностей стеклянного клина. Наблюдаемые на поверхности клина интерференционные полосы будут полосами *равной толщины*,

представляя собой геометрическое место точек при одинаковой толщине клина. Эти полосы располагаются параллельно ребру клина и перпендикулярно плоскости чертежа. Отсюда:

1. Используя условие задачи, выполним рис. 2.30.

2. При образовании интерференционной картины на поверхности клина, интерферируют лучи, отразившиеся от нижней и верхней поверхности клина. Толщина клина на участке 1 равна  $d_1$ , а для участка 2, где находится соседняя тёмная полоса, толщина клина равна  $d_2$ .

3. Записываем условия минимума интерференции для двух соседних тёмных полос. Разность хода  $\Delta$  для двух лучей будет складываться из разности оптических длин путей этих лучей  $2nd$  и из добавочной разности хода  $\lambda/2$ , возникающей при отражении луча от среды, оптически более плотной.

Запишем условия минимума интерференции для участков 1 и 2:

$$\Delta_1 = 2nd_1 + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

$$\Delta_2 = 2nd_2 + \frac{\lambda}{2} = [2(k+1)+1]\frac{\lambda}{2},$$



тогда  $\Delta_2 - \Delta_1 = 2n(d_2 - d_1) = \lambda$  как видно из рис. 2.30,  $d_2 - d_1 = l = \Delta x \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  – искомый угол между гранями клина. Следовательно,  $2n\Delta x \operatorname{tg} \alpha = \lambda \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = 0,87 \cdot 10^{-3}$ .

При малом значении тангенса его можно заменить самим углом (выраженным в радианах). Поэтому  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = 0,87 \cdot 10^{-3}$ ,  $1 \text{ рад} \approx 57,3^\circ \approx 3438'$ . Следовательно, искомый угол в минутах  $\alpha = 0,87 \cdot 10^{-3} \cdot 3438' = 3'$ .

**Ответ:**  $\alpha = 3'$ .

**Пример 5.** На установке для наблюдения колец Ньютона был измерен радиус третьего тёмного кольца ( $k = 3$ ). Когда пространство между плоскопараллельной пластиной и линзой заполнили жидкостью, то тот же радиус стало иметь кольцо с номером, на единицу большим. *Определить показатель преломления  $n$  жидкости.*

**Решение.** 1. Интерференционная картина в тонкой прослойке воздуха между линзой и стеклянной пластинкой называется кольца Ньютона. Исходя из условий задачи, выполним рис. 2.31.

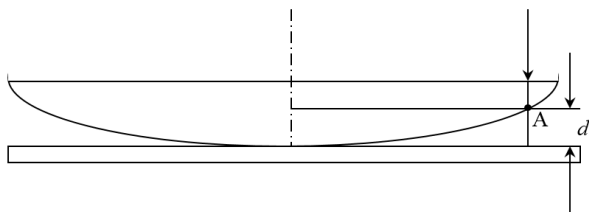


Рис. 2.31

В установке в точке  $A$  интерферируют лучи, отразившиеся от нижней поверхности линзы и верхней поверхности стеклянной пластинки. Так как лучи падают перпендикулярно на линзу, то разность хода интерферирующих лучей в случае тёмных колец запишется так:

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

Здесь  $k$  обозначает номер тёмного кольца (для центра интерференционной картины  $k = 0$ ), а  $d$  – толщина воздушного слоя в том месте, где расположено  $k$ -е кольцо. Дополнительная разность хода  $\lambda/2$  появляется при отражении луча от стеклянной пластинки (как от среды оптически более плотной). Если пространство, между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью с показателем преломления  $n$ , то оптическая разность хода лучей в этом случае запишется так:

$$\Delta = 2nd + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

2. Запишем выражения (1) и (2) применительно к условию нашей задачи. В случае воздушной прослойки:

$$\Delta_1 = 2d + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (3)$$

В случае жидкости по условию задачи

$$\Delta_2 = 2nd + \frac{\lambda}{2} = [2(k+1)+1]\frac{\lambda}{2}. \quad (4)$$

После упрощения перепишем равенства (3) и (4), получим

$$2d = k\lambda, \quad 2dn = (k+1)\lambda.$$

Отсюда:  $\frac{2dn}{2d} = \frac{(k+1)\lambda}{k\lambda}$ , или  $n = \frac{k+1}{k}$ . Подставляя значе-

ния  $k = 3$ , получим:  $n = \frac{3+1}{3} \approx 1,33$

**Ответ:**  $n \approx 1,33$ .

**Пример 6.** На дифракционную решётку в направлении нормали к её поверхности падает монохроматический свет. Период решётки  $d = 2$  мкм. *Определить наибольший порядок дифракционного максимума, который даёт эта решётка в случае красного ( $\lambda_1 = 0,7$  мкм) и в случае фиолетового ( $\lambda_2 = 0,41$  мкм) света.*

**Решение.** Из формулы, определяющей положение главных максимумов дифракционной решётки, найдём порядок  $m$  дифракционного максимума:

$$m = \frac{d \sin \varphi}{\lambda}, \quad (1)$$

где  $d$  – период решётки;  $\varphi$  – угол дифракции;  $\lambda$  – длина волны монохроматического света. Так как  $\sin \varphi$  не может быть больше 1, то число  $m$  не может быть больше  $d/\lambda$ , т. е.

$$m \leq \frac{d}{\lambda}. \quad (2)$$

Подставив в формулу (2) значения величин, получим:

–  $m \leq 2/0,7 = 2,86$  (для красных лучей);

–  $m \leq 2/0,41 = 4,88$  (для фиолетовых лучей).

**Ответ:** Если учесть, что порядок максимумов является целым числом, то для красного света  $m_{\max} = 2$  и для фиолетового  $m_{\max} = 4$ .

**Пример 7.** На дифракционную решётку нормально к её поверхности падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 550$  нм. На экран, находящийся от решётки на расстоянии  $L = 1$  м, с помощью линзы, расположенной вблизи решётки, проецируется дифракционная картина, причём первый главный максимум

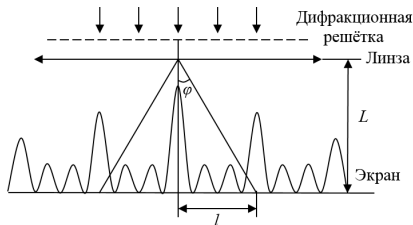


Рис. 2.32

наблюдается на расстоянии  $l = 12$  см от центрального. Определить: 1) период дифракционной решётки; 2) число штрихов на 1 см её длины; 3) общее число максимумов, даваемых решёткой; 4) угол дифракции, соответствующей последнему максимуму.

**Решение.** Выполним рисунок и покажем расстояния  $L$  и  $l$ . Период дифракционной решётки найдём из условия главного максимума:

$$d \sin \varphi = m \lambda, \quad (1)$$

где  $m$  – порядок спектра (по условию задачи,  $m=1$ ). Из рис.

2.32 следует, что  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{L}$ . Так как  $l \ll L$  и угол  $\varphi$  мал, можно принять  $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$ . Тогда выражение (1) можно записать в виде

$$d \frac{l}{L} = m \lambda, \quad (2)$$

откуда

$$d = \frac{m \lambda L}{l}. \quad (3)$$

Произведём вычисление  $d$ , используя выражение (3),

$$d = \frac{1 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7} \cdot 1}{0,12} = 4,58 \text{ (мкм)}.$$

Число штрихов на  $l' = 1 \text{ см}$ ,  $n = \frac{l'}{d} = \frac{0,01}{4,58 \cdot 10^{-6}} = 2,18 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ . Поскольку угол отклонения лучей решёткой не может быть более  $\pi/2$ , из условия (1) найдём  $m_{\max}$ :

$$m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda} \text{ (учитываем, что } \sin \varphi_{\max} = 1), \quad (4)$$

тогда  $m_{\max} = 4,58 \cdot 10^{-6} : 5,5 \cdot 10^{-7} \approx 8$ . Число  $m$  должно быть целым. Общее число максимумов, даваемых дифракционной решёткой

$$N = 2m_{\max} + 1 = 2 \cdot 8 + 1 = 17, \quad (5)$$

т. к. максимумы наблюдаются как справа, так и слева от центрального максимума (единица учитывает центральный максимум). Угол дифракции, соответствующий последнему максимуму, найдём из условия (1), записывая его в виде:

$$d \cdot \sin \varphi_{\max} = m_{\max} \lambda, \quad (6)$$

откуда

$$\varphi_{\max} = \arcsin \frac{m_{\max} \lambda}{d} = \arcsin \frac{8 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7}}{4,58 \cdot 10^{-6}} = \frac{4,4}{4,58} = 0,96 \approx 74^\circ$$

**Ответ:**  $d = 4,58$  мкм;  $n = 2,18 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$ ;  $N = 17$ ;  $\varphi_{\max} \approx 74^\circ$ .

**Пример 8.** Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погружённой в жидкость (см. рис. 2.33).

Отражённый от пластины пучок света образует угол  $\varphi = 97^\circ$  с падающим пучком.

Определить показатель преломления  $n_1$  жидкости, если отражённый свет максимально поляризован.

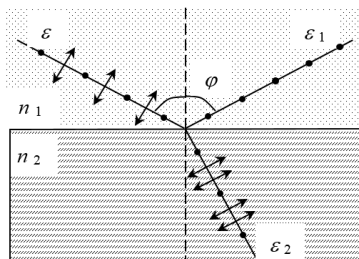


Рис. 2.33

**Решение.** Согласно закону Брюстера, пучок света, отражённый от диэлектрика, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному показателю преломления  $\operatorname{tg} \varepsilon = n_{21}$ , где  $n_{21}$  — показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{n_2}{n_1}.$$

Так как угол падения равен углу отражения, то  $\varepsilon = \varphi/2$  и, следовательно,  $\operatorname{tg}(\varphi/2) = \frac{n_2}{n_1}$  откуда  $n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}(\varphi/2)}$ .

$$\text{Произведём вычисления: } n_1 = \frac{1,5}{\operatorname{tg}(97^\circ/2)} = \frac{1,5}{1,13} = 1,33.$$

**Ответ:**  $n_1 = 1,33$ .

**Пример 9.** Два поляризатора  $P_1$  и  $P_2$  расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет  $\alpha = 60^\circ$ . Коэффициент поглощения света в поляризаторе

$k = 0,05$ . Потери на отражение света не учитывать. *Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность  $I_0$  естественного света:*

1) при прохождении через один поляризатор  $P_1$ ;

2) при прохождении через оба поляризатора.

**Решение.** 1. Естественный свет, проходя через поляризатор, преобразуется в поляризованный, уменьшая свою интенсивность как вследствие поляризации, так и вследствие поглощения. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через первый поляризатор, согласно первому закону Малюса, равна

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1-k).$$

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность  $I_0$  естественного света, падающего на первый поляризатор, на интенсивность  $I_1$  поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2I_0}{I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k}. \quad (1)$$

Произведём вычисление:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2}{1-0,05} = 2,1.$$

Таким образом, интенсивность уменьшается в 2,1 раза.

2. Интенсивность  $I_2$  света, вышедшего из поляризатора  $P_2$ , определяется вторым законом Малюса (без учёта поглощения света во втором поляризаторе):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания поляризатора  $P_2$ .

Учитывая потери интенсивности на поглощение во втором поляризаторе, получаем

$$I_2 = I_1 (1-k) \cos^2 \alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба поляризатора найдем, разделив интенсивность  $I_0$  естественного света на интенсивность  $I_2$  света, прошедшего систему из двух поляризаторов:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1(1-k)\cos^2\alpha}.$$

Заменяя отношение  $I_0/I_1$  его выражением по формуле (1), получаем  $\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}$ .

Произведём вычисление:  $\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-0,05)^2\cos^2 60^\circ} = 8,86$ .

Таким образом, после прохождения света через два поляризатора интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

**Ответ:** 1. Уменьшится в 2,1 раза.

2. Уменьшится в 8,86 раза.

### **Контрольные вопросы к разделу «Волновые процессы»**

1. Уравнение плоской монохроматической волны может быть записано в виде:  $\xi = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{v} \right) \right]$ .

Каков физический смысл параметра  $\xi$ , если уравнение описывает: а) волну на шнуре; б) звуковую волну; в) световую волну? Запишите уравнение волны так, чтобы в него в явном виде входили такие характеристики как период и длина волны.

2. В газообразной среде в направлении оси  $X$  распространяется плоская монохроматическая волна со скоростью  $v$ .

Запишите уравнение волны. Изобразите графически изменение плотности газа: а) в точке с координатой  $X$  с течением времени; б) в момент времени  $t$  в зависимости от координаты.

наты точки по отношению к источнику. Покажите на графиках отрезки, соответствующие периоду колебаний и длине волны. Запишите связь между этими характеристиками.

3. Дайте определение понятия «когерентные волны».

Что произойдёт с интерференционной картиной, если волны не будут когерентными? Опишите способы получения когерентных световых волн.

4. Ширина интерференционной полосы определяется уравнением (2.29). Как изменится интерференционная картина при: а) увеличении расстояния между источниками; б) увеличении расстояния от источников до экрана; в) уменьшении длины волны?

5. Сформулируйте условия образования максимумов и минимумов при интерференции волн. От чего зависит разность хода волн при интерференции света в тонких плёнках?

6. Тонкая плёнка равномерной толщины освещается параллельным пучком белого света. Как будет меняться результат интерференции при медленном увеличении толщины плёнки?

7. Запишите условие главных максимумов при дифракции света на решётке. Как интенсивность света в главных максимумах зависит от полного числа щелей? Как определить общее число максимумов, даваемых дифракционной решёткой?

8. Что произойдёт, если на границу раздела двух диэлектриков направить свет под углом  $\alpha$ , для которого  $\operatorname{tg} \alpha = n_2 / n_1$ , если при этом а) падающий свет естественный, б) падающий свет поляризован в плоскости падения, в) падающий свет поляризован в плоскости перпендикулярной плоскости падения?

9. Естественный свет проходит через систему поляризатор – анализатор, главные плоскости, которых параллель-



ны. На какой угол следует повернуть анализатор, чтобы на выходе из системы интенсивность света: а) уменьшилась в 4 раза; б) оказалась в 4 раза меньше интенсивности падающего естественного света?

*Рекомендуемая литература*

1. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика: учеб. пособие / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 496 с.

2. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие / Т. И. Трофимова. – Москва: Высшая школа, 2007. – 560 с.

### Глава 3. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВОЙ ДУАЛИЗМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И МИКРОЧАСТИЦ ВЕЩЕСТВА

При изучении объектов недоступных непосредственно-му восприятию органами чувств у человека остаётся единственный способ описания – сравнить их свойства с известными объектами, для которых в поле восприятия уже существуют зрительные, слуховые, тактильные или другие образы. Такая ситуация возникла при изучении свойств света, как одного из проявлений электромагнитного поля, а несколько позже при изучении свойств элементарных частиц вещества. Оказалось, что в ряде явлений и свет, и микрочастицы вещества ведут себя *подобно волнам*, наблюдаемым на поверхности воды, или при распространении звука, например, дают типичную дифракционную картину, когда на пути их распространения возникают препятствия. Это даёт основание утверждать, что свет и микрочастицы вещества обладают волновыми свойствами, и их распространение в пространстве может быть описано с использованием одной и той же математической модели – уравнения плоской монохроматической волны. С другой стороны, существуют такие явления, закономерности которых невозможно объяснить, опираясь на волновую модель, но эти закономерности легко объясняются, если рассматривать объекты как *поток локализованных в пространстве частиц (корпускул)*. Для света – это явления, связанные с его взаимодействием с веществом, например, внешний фотоэффект; для микрочастиц вещества – это движение электронов под действием электрических и магнитных полей в электронно-лучевой трубке.

Таким образом, по современным научным представлениям электромагнитное поле (в частности, свет) и микрочастицы вещества – это сложные физические объекты, не имеющие аналога в макром мире, они «не похожи ни на что из

того, что вам хоть когда-нибудь приходилось видеть» (Р. Фейнман). Это приводит к тому, что их свойства невозможно описать в рамках одной модели.

Электромагнитное поле и микрочастицы вещества обладают как корпускулярными, так и волновыми свойствами, в то же время любую из микрочастиц нельзя отождествлять ни с частицей, ни с волной в классическом представлении. *В этом состоит сущность одной из основных концепций современной физики – концепции корпускулярно-волнового дуализма.*

Для изучения двойственной природы света и микрочастиц вещества сложилось четыре раздела физики (см. табл. 3.1), два из которых (классическая механика и волновая оптика) рассмотрены в предыдущих разделах, а два других (квантовая оптика и квантовая механика) будут рассматриваться далее.

Таблица 3.1

**Корпускулярно-волновой дуализм света и микрочастиц вещества**

<i>Свойства света</i>		<i>Свойства микрочастиц вещества</i>	
<i>волновые</i>	<i>корпускулярные</i>	<i>корпускулярные</i>	<i>волновые</i>
Явления, подтверждающие наличие данных свойств			
Интерференция, дифракция, поляризация	Тепловое излучение, фотоэффект, эффект Комптона и др.	Движение электронов в магнитном и электрическом поле	Дифракция электронов на кристаллах
Характеристики, используемые при описании данных свойств объектов			
Длина волны, частота	Энергия фотона, масса фотона, импульс фотона	Энергия частицы, масса частицы, импульс частицы	Длина волны де Бройля, частота де Бройля
Раздел физики, изучающий данные свойства объекта			
Волновая оптика	Квантовая оптика	Классическая механика	Квантовая механика

### 3.1. Элементы квантовой оптики.

#### Явление теплового излучения

*Условие возникновения явления и его сущность*

Твёрдое тело, нагретое выше температуры окружающей среды, излучает электромагнитную энергию во всем диапазоне длин волн (сплошной спектр).

##### 3.1.1. Понятийный аппарат

*Поток световой энергии (мощность излучения)* – физическая величина, определяющая энергию, излучаемую телом в единицу времени:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (3.1)$$

Интегральная энергетическая светимость – физическая величина, определяющая энергию, излучаемую телом в единицу времени с единицы площади во всем диапазоне длин волн:

$$R_T = \frac{dW}{dt \cdot dS}. \quad (3.2)$$

Интегральная энергетическая светимость зависит от абсолютной температуры излучающего тела. По субъективным ощущениям соответствует яркости излучения.

*Излучательная способность (спектральная плотность энергетической светимости)* – физическая величина, определяющая энергию, излучаемую телом в единицу времени с единицы площади в диапазоне длин волн (или частот) единичной ширины:

$$r_{\lambda,T} = \frac{dW}{dt \cdot dS \cdot d\lambda}, \text{ или } r_{\nu,T} = \frac{dW}{dt \cdot dS \cdot d\nu}. \quad (3.3)$$

Излучательная способность зависит от температуры и длины волны (частоты), что отражено на рис. 3.1.

*Поглощательная способность* – физическая величина, определяющая долю поглощённого телом потока световой энергии:

$$a_{\lambda,T} = \frac{\Phi_{\text{поглощенный}}}{\Phi_{\text{падающий}}}. \quad (3.4)$$

Поглощательная способность (так же, как и излучательная) является функцией температуры и длины волны (частоты). В зависимости от того, какие длины волн поглощаются веществом в наибольшей степени, а какие отражаются им, определяются цвета тел.

*Абсолютно чёрное тело* – тело, поглощающее весь падающий на него световой поток, т. е. тело, поглощательная способность которого равна единице:  $(a_{\lambda,T})^{\text{абс.ч}} = 1$ . Близки по свойствам к абсолютно чёрному телу сажа и платиновая чернь. Моделью абсолютно чёрного тела может служить большая полость с малым отверстием. Вероятность того, что излучение, попавшее внутрь полости, после многократных отражений от стенок выйдет через отверстие наружу тем меньше, чем меньше размеры отверстия по сравнению с размерами полости.

*Абсолютно серое тело* – тело, поглощательная способность которого меньше единицы и одинакова для всех длин волн.

Связь между интегральной энергетической светимостью и излучательной способностью. Сравнивая выражения (3.2) и (3.3), получаем

$$r_{\lambda,T} = \frac{dR_T}{d\lambda}, \text{ или } r_{\nu,T} = \frac{dR_T}{d\nu}, \quad (3.5)$$

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda, \text{ или } R_T = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu. \quad (3.6)$$

### 3.1.2. Основные закономерности теплового излучения

*Закон Кирхгофа:* Отношение излучательной способности к поглощательной способности не зависит от природы излучающего тела и является для всех тел универсальной функцией температуры и длины волны (частоты):

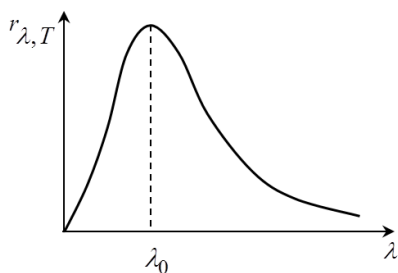
$$\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = f(\lambda, T), \text{ или } \frac{r_{\nu,T}}{a_{\nu,T}} = f(\nu, T). \quad (3.7)$$

Функция Кирхгофа (3.7) совпадает с излучательной способностью абсолютно чёрного тела  $f(\lambda, T) = (r_{\lambda,T})^{абс.ч}$  поскольку для абсолютно чёрного тела поглощательная способность равна единице. Это позволяет связать излучательную способность любого тела с излучательной способностью абсолютно чёрного тела:

$$r_{\lambda,T} = \alpha_{\lambda,T} \cdot (r_{\lambda,T})^{абс.ч}. \quad (3.8)$$

*Экспериментальный закон распределения энергии  
по длинам волн в спектре излучения  
абсолютно чёрного тела*

Энергия, излучаемая нагретым телом, распределяется неравномерно по длинам волн, существует длина волны  $\lambda_0$ ,



при которой спектральная плотность энергии (излучательная способность) принимает максимальное значение (см. рис. 3.1), при этом  $\lambda_0$  зависит от температуры тела.

Рис. 3.1

*Первый закон Вина (закон смещения):* Длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности абсолютно чёрного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре:

$$\lambda_0 = \frac{b}{T}, \quad (3.9)$$

где  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ .

Из этого закона следует, что при повышении температуры максимум кривой распределения энергии по длинам волн в спектре излучения абсолютно чёрного тела смещается в сторону коротких волн (см. рис. 3.2).

*Второй закон Вина:* Максимальное значение излучательной способности абсолютно чёрного тела прямо пропорционально пятой степени абсолютной температуры:

$$r_{\lambda, T}^{\max} = C \cdot T^5, \quad (3.10)$$

где  $C = 1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/ м}^3 \cdot \text{К}^5$ .

Из этого закона следует, что при повышении температуры высота максимума кривой распределения энергии по длинам волн в спектре излучения абсолютно чёрного тела резко увеличивается (см. рис. 3.2).

*Закон Стефана – Больцмана:* Интегральная энергетическая светимость абсолютно чёрного тела прямо пропорциональна четвёртой степени абсолютной температуры:

$$R_T = \sigma \cdot T^4, \quad (3.11)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/ м}^2 \cdot \text{К}^4$  – постоянная Стефана – Больцмана.

Учитывая связь между интегральной энергетической светимостью и излучательной способностью (3.6) и геометрический смысл интеграла, можно сделать вывод, что при повышении температуры площадь под кривой распределения энергии по длинам волн в спектре излучения абсолютно чёрного тела резко увеличивается. Графически изменения,

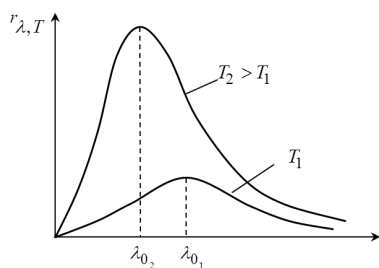


Рис. 3.2

происходящие с законом распределения энергии по длинам волн в спектре излучения абсолютно чёрного Тела, вытекающие из законов Вина и Стефана – Больцмана, представлены на рис. 3.2.

### 3.1.3. Трудности волновой теории света при объяснении закономерностей теплового излучения. Гипотеза Планка

Попытки получить теоретически вид универсальной функции Кирхгофа на основе волновой модели света (согласно которой, свет излучается в виде непрерывной электромагнитной волны) и классической статистики (основанной на законе о равномерном распределении энергии по степеням свободы) привели к формуле Рэлея – Джинса:  $f(\nu, T) = (r_{\nu, T})^{\text{абс.ч}} = \frac{2\pi\nu^2 kT}{c^2}$ , из которой следует, что при  $\nu \rightarrow \infty$  (или  $\lambda \rightarrow 0$ ) излучательная способность абсолютно чёрного тела, а значит и его интегральная энергетическая светимость  $\rightarrow \infty$ . Такой вывод противоречит экспериментальному закону распределения энергии по длинам волн в спектре излучения абсолютно чёрного тела (см. рис. 3.3) и фундамен-



тальному закону физики – закону сохранения энергии. Это противоречие получило название «ультрафиолетовая катастрофа». Разрешить противоречие удалось М. Планку в 1900 г., но для этого ему пришлось отказаться от представлений о том, что в процессе излучения энергия тела меняется непрерывно.

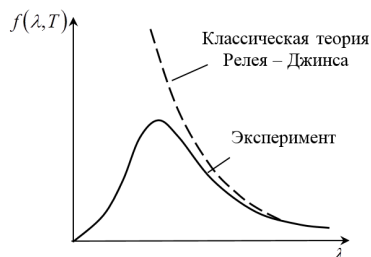


Рис. 3.3

*Гипотеза Планка:* Атомы вещества излучают энергию не непрерывно, а отдельными порциями – квантами, причём энергия одного кванта пропорциональна частоте излучения:

$$\varepsilon_{\text{кв}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (3.12)$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с – постоянная Планка.

Опираясь на эту гипотезу, Планк вывел формулу для универсальной функции Кирхгофа в виде

$$f(\nu, T) = (r_{\nu, T})^{\text{абс.ч}} = \frac{2\pi\nu^2 kT}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (3.13)$$

Формула Планка не только хорошо согласуется с экспериментальной кривой, но и позволяет получить законы Вина и Стефана – Больцмана, а также теоретически вычислить числовые коэффициенты в этих уравнениях. Законы Вина получаются при исследовании выражения (3.13) на экстремум, а закон Стефана – Больцмана – при интегрировании этой функции на основании определения  $R_T = \int_0^\infty r_{\nu, T} d\nu$ .

Таким образом, М. Планк утвердил в физике принципиально новую идею о недостаточности волновой модели для описания процессов излучения электромагнитной энергии атомами вещества и положил начало развитию квантовой теории.

### 3.2. Элементы квантовой оптики.

#### Явление внешнего фотоэффекта

*Условие возникновения явления и его сущность*

Внешний фотоэффект – это явление вырывания электронов с поверхности металла под действием света.

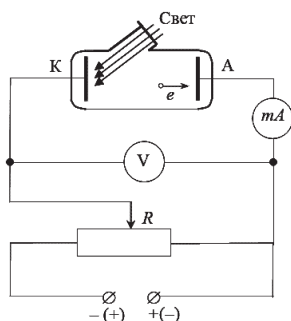


Рис. 3.4

Экспериментальная установка для изучения этого явления изображена на рис. 3.4.

#### 3.2.1. Понятийный аппарат

Работа выхода электронов из металла ( $A_{\text{вых}}$ ) – минимальная энергия, которую необходимо сообщить электрону, чтобы преодолеть силы, удерживающие его внутри вещества. Работа выхода

определяется химическим составом вещества и является табличной величиной.

Вольт-амперная характеристика фотоэффекта – зависимость тока, вызванного движением электронов, вылетающих с поверхности освещенного электрода, от приложенного напряжения (см. рис. 3.5).

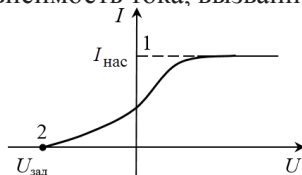


Рис. 3.5

Чтобы снять эту характеристику, нужно на эксперименталь-

ной установке с помощью реостата R менять числовое значение и полярность напряжения между освещённым и неосвещённым электродами внутри вакуумного сосуда.

Вольт-амперная характеристика необходима для того, чтобы можно было определить параметры электронов, вырывающихся светом (см. понятия «ток насыщения» и «задерживающее напряжение»).

*Ток насыщения* (точка 1 на вольт-амперной характеристике) – сила тока, при которой все электроны, вырванные светом из катода в единицу времени, успевают достичь анода за это же время. В этой ситуации увеличение напряжения не приводит к росту тока и справедливо равенство

$$I_{\text{нас.}} = e \cdot n, \quad (3.14)$$

где  $e$  – заряд электрона;  $n$  – количество электронов, вырывающихся светом с поверхности металла в единицу времени.

*Задерживающее напряжение* (точка 2 на вольт-амперной характеристике) – напряжение обратной полярности (на освещённом электроде положительный потенциал), при котором все вырванные светом электроны задерживаются электрическим полем и фототок прекращается. В этой ситуации работа тормозящего электрического поля равна изменению кинетической энергии электрона от значения  $E_{\text{к}}^{\text{max}}$  до нуля и справедливо равенство

$$eU_{\text{зад}} = E_{\text{к}}^{\text{max}}, \quad (3.15)$$

где  $E_{\text{к}}^{\text{max}}$  – максимальная кинетическая энергия вырванных светом электронов.

*Примечание:* В нерелятивистском случае, когда кинетическая энергия электрона много меньше его энергии покоя ( $E_0 = 0,51$  МэВ), кинетическая энергия рассчитывается по классической формуле  $E_{\text{к}}^{\text{max}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2}$ , в противном случае используется соотношение теории относительности:  $E_{\text{к}} = E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$ .

### **3.2.2. Основные экспериментальные закономерности внешнего фотоэффекта**

1. Ток насыщения и связанное с ним количество электронов, вырываемых светом с поверхности металла в единицу времени, прямо пропорционально световому потоку.

2. Задерживающее напряжение и связанная с ним максимальная кинетическая энергия вырываемых электронов линейно возрастают с ростом частоты падающего света.

3. Задерживающее напряжение и связанная с ним максимальная кинетическая энергия вырываемых электронов *не зависят* от мощности излучения (от светового потока).

4. Существует «*красная граница фотоэффекта*», т. е. такая частота, выше которой фотоэффект происходит при любом (даже малом) световом потоке, но ниже которой фотоэффект не возникает ни при каком световом потоке.

5. Фотоэффект практически безынерционен, т. е. возникает сразу после включения источника света.

*Примечание:* При очень большой плотности энергии света (например, в лазерном излучении) некоторые из этих закономерностей могут нарушаться, возникают нелинейные эффекты, которые рассматриваются в специальных разделах физики.

### **3.2.3. Трудности волновой теории света при объяснении закономерностей внешнего фотоэффекта. Гипотеза и уравнение Эйнштейна для фотоэффекта**

С точки зрения волновой модели света, взаимодействие света с электронами металла сводится к возникновению вынужденных колебаний электронов под действием переменного электрического поля световой волны. Амплитуда и скорость вынужденных колебаний электронов на начальном этапе (предшествующем установившимся колебаниям) зави-

сят от мощности внешнего источника (в рассматриваемом случае – источника света) и времени его действия. Поэтому увеличение мощности падающего света (светового потока) должно приводить к увеличению кинетической энергии, которую получает электрон при вылете из металла. Кроме этого, для накопления энергии, достаточной для отрыва электрона от металла, при заданной мощности источника света должно пройти некоторое время. Но эти выводы противоречат экспериментальным закономерностям 3 и 5 (см. гл. 3.2.2). Волновая модель не в состоянии объяснить и четвёртую закономерность. Достичь энергии, достаточной для отрыва электрона от металла, можно без изменения частоты излучения, за счёт изменения амплитуды падающей световой волны. Другими словами, с волновой точки зрения «красной границы» фотоэффекта не должно существовать, но эксперимент фиксирует её наличие.

Для разрешения этих противоречий А. Эйнштейн в 1905 г., во-первых, расширил гипотезу Планка, предположив, что свет не только излучается дискретными порциями, но и распространяется в пространстве, а также взаимодействует с веществом в виде потока особых частиц (корпускул). Эти частицы Эйнштейн назвал *фотонами*. Фотоэффект с этой точки зрения – это результат столкновения фотона с электроном, при котором энергия от фотона к электрону передаётся практически мгновенно, что сразу объясняет безынерционность наблюдаемого явления. Во-вторых, Эйнштейн предложил дополнительную гипотезу, описывающую процесс взаимодействия света с веществом.

||| *Гипотеза Эйнштейна:* При взаимодействии света с веществом один электрон взаимодействует с одним фотоном.

Записав закон сохранения энергии с учётом сформулированной гипотезы, Эйнштейн получил уравнение (3.16).

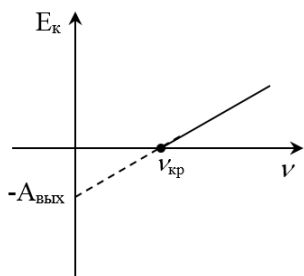
*Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:*

$$h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\text{к}}^{\text{max}}. \quad (3.16)$$

Энергия фотона  $\varepsilon_{\text{ф}} = h\nu$  расходуется на совершение работы выхода электрона из металла  $A_{\text{вых}}$  и на сообщение ему кинетической энергии  $E_{\text{к}}^{\text{max}}$ .

Гипотеза и уравнение Эйнштейна позволяют объяснить все экспериментальные закономерности явления внешнего фотоэффекта.

Увеличение светового потока с корпускулярной точки зрения означает увеличение количества фотонов, попадающих на вещество в единицу времени. Если один фотон вырывает из металла один электрон, то количество электронов, вырываемых светом с поверхности металла в единицу времени, прямо пропорционально световому потоку, что соответствует закономерности 1 (см. гл. 3.2.2).



*Рис. 3.6*

Выразим кинетическую энергию электрона из уравнения (3.16):  $E_{\text{к}} = h\nu - A_{\text{вых}}$ . Графически эта зависимость представлена на рис. 3.6 и соответствует закономерности 2 (см. гл. 3.2.2).

Поскольку при взаимодействии света с веществом один электрон получает энергию от одного фотона, а не от всего светового потока, то его энергия не зависит от величины светового потока (см. закономерность 3 в гл. 3.2.2).

Из уравнения (3.16) следует, что при уменьшении частоты падающего света кинетическая энергия вырванных электронов также уменьшается, а работа выхода (как табличная величина) не изменяется. Тогда найдется такая частота  $\nu_{кр}$ , при которой  $E_k = 0$ . При дальнейшем уменьшении частоты энергия фотона окажется меньше работы выхода и фотоэффект прекратится. Таким образом, существует «красная граница фотоэффекта» – минимальная частота, при которой еще возможен фотоэффект.

Вычислить «красную границу» можно из уравнения (3.16) при условии  $E_k^{max} = 0 : h\nu_{кр} = A_{вых}$ , откуда

$$\nu_{кр} = \frac{A_{вых}}{h}, \text{ или } \lambda_{кр} = \frac{hc}{A_{вых}}. \quad (3.17)$$

### 3.3. Связь волновых и корпускулярных характеристик света

<i>Волновые характеристики:</i>	<i>Корпускулярные характеристики:</i>
Частота – $\nu$ .	Энергия фотона – $\varepsilon_\phi$ .
Циклическая частота – $\omega = 2\pi\nu$ .	Масса фотона – $m_\phi$ .
Длина волны – $\lambda = \frac{c}{\nu}$ .	Импульс фотона – $p_\phi$ .

Гипотеза Планка изначально определила связь между энергией кванта (фотона) и частотой излучения  $\varepsilon_\phi = h\nu$ , с учётом приведённых выше соотношений и закона взаимосвязи массы и энергии Эйнштейна ( $E = mc^2$ ), можно связать параметры фотона с другими волновыми характеристиками:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\phi &= h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} \\ m_\phi &= \frac{\varepsilon_\phi}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{\hbar\omega}{c^2} = \frac{h}{\lambda c} \\ p_\phi &= m_\phi c = \frac{\varepsilon_\phi}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda} \end{aligned} \right\}. \quad (3.18)$$

В уравнениях (3.18) использовано обозначение  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

При рассмотрении волновой теории света (см. гл. 2) было показано, что цвет света определяется его частотой, а яркость (как энергетическая характеристика) пропорциональна квадрату амплитуды волны. С точки зрения корпускулярной теории, изменение цвета связано с изменением энергии или массы фотона, а изменение яркости – с изменением количества фотонов, поскольку общая энергия света складывается из энергий отдельных фотонов (в случае монохроматического излучения  $E_{\text{общая}} = N \cdot \epsilon_{\phi} = N \cdot h\nu$ ). При возникновении явлений дифракции и интерференции на экране наблюдается перераспределение энергии с образованием чередующихся максимумов и минимумов освещённости. Освещённость определяется энергией, попадающей в единицу времени на единицу площади поверхности, поэтому с волновой точки зрения эта величина, как было сказано, связана с квадратом амплитуды результирующей световой волны в том или ином месте экрана. С корпускулярной точки зрения, разная освещённость в точках максимума и минимума свидетельствует о разной вероятности попадания фотонов в эти точки.

|| Таким образом, *неразрывная связь волновых и корпускулярных свойств света* выражается в том, что квадрат амплитуды световой волны в данной точке пространства является мерой вероятности попадания фотонов в данную точку.



### 3.4. Волновые свойства микрочастиц вещества

Долгое время считалось, что два вида материи (вещество и поле) принципиально отличаются друг от друга:

- вещество локализовано в пространстве, а поле – нет;
- в одной и той же точке пространства могут существовать несколько полей, а частицы вещества не могут занимать один и тот же объём;
- поле распространяется в пространстве со скоростью света, а скорость частиц всегда меньше скорости света.

Однако к XX в. накопились факты, приведшие к признанию двойственности свойств электромагнитного поля. Оказалось, что свет (как одно из проявлений этого поля) наряду с волновыми свойствами обладает свойствами потока частиц (корпускул). Об этом свидетельствуют, в частности, рассмотренные явления теплового излучения и внешнего фотоэффекта. В 1924 г. французский физик Луи де Бройль выдвинул идею об универсальности корпускулярно-волнового дуализма для всех материальных объектов. Он утверждал, что не только фотоны, но и электроны и другие микрочастицы, наряду с корпускулярными, обладают также и волновыми свойствами.

Таким образом, концепция корпускулярно-волнового дуализма разрушила противопоставление двух видов материи, раскрыла новую грань тезиса о единстве материи.

#### 3.4.1. Волновые свойства микрочастиц вещества.

##### *Экспериментальные подтверждения*

Пучок электронов, направленный на кристалл (который можно рассматривать как естественную трёхмерную дифракционную решётку) при отражении от кристалла (опыты К. Девисона и Л. Джермера), а также при прохождении через тонкую металлическую фольгу (опыты П. Тартаковского и

Г. Томсона) даёт отчётливую дифракционную картину, полностью совпадающую с дифракционной картиной электромагнитных волн рентгеновского диапазона  $\lambda \approx 10^{-10}$  м в аналогичных условиях.

Дифракция – это типично волновое явление, поэтому наблюдение этого явления для электронов (а позже и для других частиц) можно рассматривать как экспериментальное доказательство наличия волновых свойств у микрочастиц вещества. Более того, это явление наблюдается не только для мощных пучков, что можно было бы трактовать как статистическую особенность коллективного поведения частиц, но и для столь слабых пучков, когда интервал времени между двумя электронами в  $10^4$  раз превышает время прохождения электроном прибора (опыты В. Фабриканта). Следовательно, волновые свойства микрочастиц присущи каждой частице отдельно.

Подчеркнём ещё раз, что признавая наличие волновых свойств у микрочастиц, мы не можем игнорировать наличие у них корпускулярных свойств. Когда с помощью макроприборов мы пытаемся зарегистрировать микрочастицу, то всегда обнаруживаем её как неделимое целое. Никто никогда не наблюдал «полэлектрона» или «полпротона» (в то время, как волну (в классическом понимании этого термина) всегда можно разделить на части и воспринимать затем каждую часть в отдельности, например, при отражении и преломлении на границе раздела двух сред).

### ***3.4.2. Волновые свойства микрочастиц вещества.***

#### ***Понятийный аппарат. Гипотеза де Бройля***

В связи с наличием волновых свойств у микрочастиц для описания их движения можно применять ту же простейшую математическую модель, что и для волн любой другой

природы – уравнение плоской монохроматической волны вида  $x = A \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\omega \cdot x}{v}\right)$ , а также связанные с этой моделью понятия «длина волны», «частота волны». Подчёркивая специфическую природу этих волн (отличающую их от волн на воде, например), используют термин «*волна де Бройля*», а соответствующее этой волне уравнение – «*волновая функция микрочастицы*».

*Гипотеза де Бройля:* Любой частице вещества, обладающей массой  $m$  и движущейся со скоростью  $v$ , можно сопоставит волновой процесс, характеризующийся частотой  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$ , при этом волновые и корпускулярные характеристики связаны такими же соотношениями, как и для света.

#### *Связь волновых и корпускулярных характеристик микрочастиц вещества*

Если микрочастица имеет массу  $m$ , движется со скоростью  $v$ , обладает импульсом  $p$  и энергией  $E$ , то её движение можно описывать волновой функцией, частота и длина волны для которой определяются соотношениями:

$$\nu_{\text{де Бройля}} = \frac{E}{h}, \quad (3.19)$$

$$\lambda_{\text{де Бройля}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}. \quad (3.20)$$

#### *Волновая функция, или пси-функция ( $\Psi$ )*

Поскольку волна – объект, не локализованный в пространстве (не имеющий чёткой границы), такие понятия классической механики как координата частицы, импульс частицы, траектория движения теряют смысл. При описании состояния микрочастицы в данный момент времени в кван-

товой механике вместо «точной координаты» указывают вероятность того, что микрочастица может быть обнаружена в окрестностях точки с заданной координатой. Таким образом, *волновая функция (Ψ-функция) – это функция координат и времени, определяющая состояние движения микрочастицы в данной точке пространства в данный момент времени с учётом её волновых свойств и несущая информацию о вероятности обнаружения микрочастицы в определённой области пространства.*

В квантовой механике доказывается, что с вероятностью обнаружения частицы связана не сама функция, а квадрат её модуля. Кроме того, волновая функция в общем случае является комплексной.

*Волновая функция для свободно движущейся частицы имеет вид*

– в тригонометрической форме:

$$\psi = A \cos\left(\frac{E \cdot t}{\hbar} - \frac{px}{\hbar}\right) + i \cdot A \sin\left(\frac{E \cdot t}{\hbar} - \frac{px}{\hbar}\right); \quad (3.21)$$

– в показательной форме:  $\psi = A \cdot e^{-i\left(\frac{Et}{\hbar} - \frac{px}{\hbar}\right)}$ .

*Физический смысл Ψ-функции:* Квадрат модуля волновой функции численно равен вероятности обнаружения частицы в единичном объёме вблизи заданной точки или, другими словами, квадрат модуля пси-функции численно равен плотности вероятности обнаружения частицы в окрестности заданной точки

$$|\psi|^2 = \frac{dW}{dV} = \omega, \quad (3.22)$$

где  $dW$  – вероятность обнаружения частицы в бесконечно малом объёме  $dV$ ;  $\omega$  – плотность вероятности.

*Примечание:* Обратите внимание на аналогию между этим утверждением, отражающим неразрывную связь между волновым и корпускулярным подходом при описании свойств микрочастиц, с подобным способом описания свойств света в конце гл. 3.3.

*Свойства  $\Psi$ -функции.* Так же, как и вероятность,  $\Psi$ -функция должна быть непрерывной, однозначной, конечной. Кроме того, для неё должно выполняться условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 dV = 1, \quad (3.23)$$

поскольку данный интеграл выражает вероятность обнаружения частицы в интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ , что является достоверным событием, вероятность которого всегда равна 1.

### **3.4.3. Волновые свойства микрочастиц вещества.**

#### ***Границы применимости классической механики.***

#### ***Соотношения неопределённостей Гейзенберга***

Во всех формулах, связывающих волновые и корпускулярные свойства микрочастиц, присутствует постоянная Планка  $\hbar$ , имеющая размерность действия: Дж  $\cdot$  с. В физике такую же размерность имеют некоторые пары величин, которые принято называть канонически сопряжёнными, например, произведение импульса и координаты  $p_x \cdot x$ , произведение энергии и времени  $E \cdot t$ .

*Классическая механика описывает ситуации, когда действие, характерное для макро- или микрочастицы, много больше, чем постоянная Планка, а квантовая механика, учитывая особые свойства микрочастиц, – когда характерное для них действие сравнимо с постоянной Планка.*

Из выражения (3.20) видим, что при увеличении массы частицы длина волны де Бройля уменьшается. Для макротел она становится много меньше размеров периодических

структур («дифракционных решёток»), которые можно воспроизвести в экспериментальных условиях, поэтому волновые эффекты для макротел наблюдать невозможно. Макротела (хотя и состоят из микрочастиц, обладающих волновыми свойствами) не проявляют волновых свойств, их движение полностью описывается законами классической механики.

*Соотношения неопределённостей Гейзенберга:*  
Использование понятий классической механики при описании движения микрочастиц без учёта их волновых свойств сопряжено с заведомой погрешностью (неопределённостью), которая для любой пары канонически сопряжённых величин не может быть меньше постоянной Планка:

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar, \Delta p_y \Delta y \geq \hbar, \Delta p_z \Delta z \geq \hbar, \Delta E \Delta t \geq \hbar. \quad (3.24)$$

Из этих соотношений следует, что при одновременном измерении двух классических параметров движения частицы уменьшение погрешности измерения одного из параметров (например, координаты) неизбежно приводит к увеличению неопределённости информации о другом параметре (импульсе) и наоборот.

В соотношениях неопределённостей Гейзенберга постоянная Планка выступает как абсолютный предел точности одновременного измерения координаты и импульса частицы, т. е. как предел, ограничивающий степень точности описания движения микрообъектов с помощью понятий классической механики.

Соотношения Гейзенберга можно использовать для выбора метода при решении той или иной задачи о движении микрочастиц:

*Если по условию задачи погрешности, вытекающие из соотношений неопределённостей Гейзенберга, нас устраи-*

вают, то задачу можно решать на основе законов классической механики. В противном случае необходимо учитывать волновые свойства микрочастиц и пользоваться законами квантовой механики (см. примеры решения задач № 5, 6 в гл. 3.5).

### 3.5. Примеры решения задач к разделу «Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного поля и микрочастиц вещества»

**Пример 1.** Доля энергии, излучаемая абсолютно чёрным телом в узком интервале длин волн  $\Delta\lambda$  вблизи точки, соответствующей максимуму излучательной способности, составляет 4 % от полной энергетической светимости тела.

Определить температуру тела, если ширина интервала  $\Delta\lambda = 0,1$  мкм. Определить массу и импульс фотонов, соответствующих излучению с длиной волны  $\lambda_0$  (см. рис. 3.7).

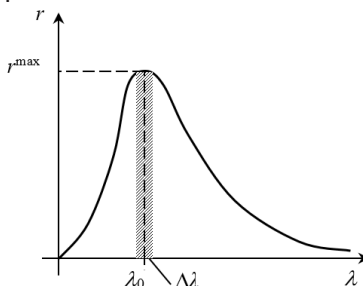


Рис. 3.7

**Решение.** В задаче рассматривается явление теплового излучения, основной особенностью которого является то, что в излучении присутствуют все длины волн (сплошной спектр), но при этом энергия распределяется по длинам волн неравномерно, с явно выраженным максимумом при некоторой длине волны  $\lambda_0$  (см. рис. 3.7). На графике  $r$  – спектральная плотность энергетической светимости, определяющая энергию, излучаемую телом в единицу времени с единицы площади в единичном интервале длин волн,  $r = \frac{dW}{dt \cdot dS \cdot d\lambda}$ . Из этого определения следует, что энергия, излу-

чаемая телом в единицу времени с единицы площади в произвольном интервале длин волн от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$  может быть найдена как интеграл

$$\frac{dW}{dt \cdot dS} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} r d\lambda, \quad (1)$$

что в графической интерпретации соответствует площади криволинейной трапеции под графиком функции  $r-\lambda$ , заштрихованной на рис. 3.7.

По условию задачи, ширина интервала  $\Delta\lambda$  мала, тогда приближенное значение интеграла в уравнении (1) (т. е. заштрихованная площадь) найдётся как произведение  $\Delta\lambda r^{\max}$ :

$$\frac{dW}{dt \cdot dS} = \Delta\lambda r^{\max}. \quad (2)$$

Интегральная энергетическая светимость  $R$ , определяющая энергию, излучаемую телом в единицу времени с единицы площади в интервале длин волн от 0 до  $\infty$ , соответствует на графике всей площади под кривой  $r-\lambda$ .

Доля энергии, излучаемой в интервале длин волн  $\Delta\lambda$ , по отношению к полной энергетической светимости тела составляет по условию задачи 4 %, что можно записать следующим образом:

$$\frac{\Delta\lambda r^{\max}}{R} = 0,04. \quad (3)$$

По второму закону Вина:

$$r^{\max} = CT^5. \quad (4)$$

По закону Стефана – Больцмана:

$$R = \sigma T^4. \quad (5)$$

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнение (3), получаем  $\frac{\Delta\lambda CT^5}{\sigma T^4} = \frac{\Delta\lambda CT}{\sigma} = 0,04$ , откуда окончательно

$$T = \frac{0,04\sigma}{\Delta\lambda C}. \quad (6)$$



Проверим, даёт ли правая часть уравнения (6) единицу измерения абсолютной температуры (Кельвин):

$$\frac{[\sigma]}{[\lambda] \cdot [C]} = \frac{\text{Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4}{\text{м} \cdot \text{Вт/м}^3 \cdot \text{К}^5} = \text{К}.$$

Тепловое излучение – это одно из явлений, закономерности которого можно объяснить только на основе концепции корпускулярно-волнового дуализма, т. е. с учётом того факта, что наряду с волновыми свойствами свет обладает свойствами потока частиц (фотонов). Согласно гипотезе Планка, энергия одного кванта (одного фотона) связана с частотой излучения соотношением  $\varepsilon_{\phi} = h\nu$ . Используя закон взаимосвязи массы и энергии  $\varepsilon = mc^2$  и связь частоты с длиной волны  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , получим формулы для расчёта массы и импульса фотона

$$m_{\phi} = \frac{h}{\lambda c}; \quad p_{\phi} = m_{\phi} c = \frac{h}{\lambda}. \quad (7)$$

где  $c$  – скорость света.

По условию задачи, необходимо найти массу и импульс фотонов, соответствующих той длине волны, на которую приходится максимум излучательной способности абсолютно чёрного тела  $\lambda_0$ . Эта длина волны может быть найдена по первому закону Вина:

$$\lambda_0 = \frac{b}{T}. \quad (8)$$

С учётом уравнения (8) уравнения (7) принимают вид

$$m_{\phi} = \frac{hT}{bc}; \quad p_{\phi} = \frac{hT}{b}. \quad (9)$$

Произведём вычисления.

Константы в законах Вина и Стефана – Больцмана в системе СИ имеют значения:  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ ;  $C = 1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^3 \cdot \text{К}^5$ ;  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$ .

По условию:  $\Delta\lambda = 0,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Из выражения (6):

$$T = (0,04 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}) : (0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 1,29 \cdot 10^{-5}) = 1758 \text{ (К)}.$$

Из выражения (9):

$$m_{\phi} = (6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1758) : (2,9 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8) = 1,34 \cdot 10^{-36} \text{ (кг)};$$

$$p_{\phi} = (6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 1758) : (2,9 \cdot 10^{-3}) = 4,02 \cdot 10^{-28} \text{ (кг} \cdot \text{ м/с)}.$$

**Ответ:**  $T = 1758 \text{ К}$ ;  $m_{\phi} = 1,34 \cdot 10^{-36} \text{ кг}$ ;  $p_{\phi} = 4,02 \cdot 10^{-28} \text{ кг} \cdot \text{ м/с}$ .

**Пример 2.** Можно условно считать, что Земля излучает как серое тело, находящееся при температуре 280 К, при этом отношение её энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно чёрного тела  $a = 0,26$ . Сколько энергии в среднем излучает Земля за один час с каждого квадратного метра своей поверхности?

**Решение.** В задаче рассматривается явление теплового излучения. Интегральная энергетическая светимость для абсолютно чёрного тела определяется по закону Стефана – Больцмана:  $R_{\text{абс.ч}} = \sigma T^4$ . По условию задачи, тело не является абсолютно чёрным и  $\frac{R}{R_{\text{абс.ч}}} = a = 0,26$ , откуда энергетическая светимость серого тела

$$R = a R_{\text{абс.ч}} = a \sigma T^4, \quad (1)$$

По определению, энергетическая светимость численно равна энергии, излучаемой телом в единицу времени с единицы площади  $R = \frac{dW}{dt \cdot dS}$ . Эта величина зависит от температуры излучающей поверхности, в разных точках Земной поверхности она имеет разные значения, но, рассматривая усреднённые значения, можно считать  $R = \text{const}$  и записать  $R = \frac{W}{t \cdot S}$ , откуда энергия, излучаемая с единицы площади за произвольное время  $t$ :  $\frac{W}{S} = Rt$ , или с учётом выражения (1):

$$\frac{W}{S} = a \cdot \sigma \cdot T^4 t. \quad (2)$$

Произведём вычисления.

В системе СИ постоянная Стефана – Больцмана  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/ м}^2 \cdot \text{К}^4$ ; по условию  $t = 1 \text{ ч} = 3\,600 \text{ с}$ .

$$\frac{W}{S} = 0,26 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 280^4 \cdot 3600 = 0,26 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 61,64 \cdot 10^8 \times \\ \times 3,6 \cdot 10^3 = 326 \text{ (кДж/м}^2\text{)}$$

Ответ:  $\frac{W}{S} = 326 \text{ кДж/м}^2$ .

**Пример 3.** Определить максимальную скорость  $v_{\max}$  фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны  $\lambda_1 = 0,155 \text{ мкм}$ ; 2)  $\gamma$ -излучением с длиной волны  $\lambda_2 = 1 \text{ нм}$ .

**Решение.** В задаче рассматривается явление внешнего фотоэффекта, сущность которого состоит в вырывании электронов из металла под действием света. В данном явлении наиболее ярко проявляются корпускулярные свойства света. Согласно гипотезе Эйнштейна, процесс взаимодействия света с веществом сводится к столкновению фотона и электрона.

Уравнение Эйнштейна при этом имеет вид

$$\varepsilon_{\phi} = A_{\text{вых}} + E_{\text{к}}^{\max}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{\phi}$  – энергия фотона;  $A_{\text{вых}}$  – работа выхода электрона из металла;  $E_{\text{к}}^{\max}$  – максимальная кинетическая энергия вырванного электрона.

Используя связь между волновыми и корпускулярными характеристиками света, запишем энергию фотона:

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{hc}{\lambda}, \quad (2)$$

где  $h$  – постоянная Планка;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\lambda$  – длина волны.

Кинетическая энергия электрона может быть выражена или по классической формуле

$$E_{\text{к}} = \frac{m_0 v^2}{2} \quad (3)$$

или по релятивистской формуле

$$E_{\text{к}} = E_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right), \quad (4)$$

в зависимости от того, какая скорость сообщается фотоэлектрону. Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия  $\varepsilon$  фотона много меньше энергии покоя  $E_0$  электрона, то может быть применена формула (3), если же  $\varepsilon$  сравнима по величине с  $E_0$ , то вычисление по формуле (3) приводит к ошибке, поэтому нужно пользоваться формулой (4).

1. Вычислим энергию фотона ультрафиолетового излучения по формуле (2):

$$\varepsilon_1 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,55 \cdot 10^{-7}} = 1,28 \cdot 10^{-18} \text{ (Дж)},$$

$$\text{или } \varepsilon_1 = \frac{1,28 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 8 \text{ (эВ)}.$$

Полученная энергия фотона 8 эВ много меньше энергии покоя электрона 0,51 МэВ. Следовательно, для данного случая кинетическая энергия фотоэлектрона в уравнении Эйнштейна может быть выражена по классической формуле  $\varepsilon_1 = A + \frac{m_0 v_{\max}^2}{2}$ , откуда

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_1 - A)}{m_0}}. \quad (5)$$

Проверим, даёт ли полученная формула единицу скорости. Для этого в правую часть формулы (5) вместо символов величин подставим обозначения единиц:

$$\sqrt{\frac{[\varepsilon_1 - A]}{[m_0]}} = \sqrt{\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}}} = \sqrt{\frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2}{1 \text{ кг}}} = 1 \text{ (м/с)}.$$

Найденная единица является единицей скорости.

Подставив значения величин в формулу (5), найдём

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2(1,28 \cdot 10^{-18} - 0,75 \cdot 10^{-18})}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ (м/с)}.$$

2. Вычислим энергию фотона  $\gamma$ -излучения:

$$\varepsilon_1 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{10^{-12}} = 1,99 \cdot 10^{-13} \text{ (Дж)} = 1,24 \text{ (МэВ)}.$$

Работа выхода электрона для серебра  $A = 4,7$  эВ пренебрежимо мала по сравнению с энергией фотона  $\varepsilon_2 = 1,24$  МэВ, поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона. Таким образом, в данном случае кинетическая энергия электрона больше его энергии покоя, и для вычисления скорости электрона следует взять релятивистскую формулу кинетической энергии (4). Из этой формулы найдём

$$\beta = \frac{\sqrt{(2E_0 + E_k)E_k}}{E_0 + E_k}.$$

Заметив, что  $v = c \cdot \beta$  и  $E_k = \varepsilon_2$ , получим

$$v_{\max} = c \frac{\sqrt{(2E_0 + \varepsilon_2)\varepsilon_2}}{E_0 + \varepsilon_2}.$$

Произведём вычисления (энергии  $E_0$  и  $\varepsilon_2$  входят в формулу в виде отношения, поэтому их можно не выражать в единицах СИ):

$$v_{\max} = 3 \cdot 10^8 \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,51 + 1,24) \cdot 1,24}}{0,51 + 1,24} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}.$$

**Ответ:**  $v_1^{\max} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ ;  $v_2^{\max} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

**Пример 4.** При освещении некоторого металла светом с частотой  $1,8 \cdot 10^{15}$  Гц задерживающая разность потенциалов оказалась равной 2,5 В. Определить минимальную частоту, при которой ещё возможен фотоэффект с поверхности данного металла. Во сколько раз длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта, больше, чем длина волны де Бройля для электронов, вырываемых светом из металла в описанной ситуации?

**Решение.** В задаче рассматривается явление внешнего фотоэффекта (вырывание электронов с поверхности металла под действием света). Это явление описывается уравнением Эйнштейна, в основе которого лежит корпускулярная модель света как потока частиц (фотонов):

$$h\nu = A_{\text{вых}} + E_{\kappa}^{\text{max}}, \quad (1)$$

где  $h\nu$  – энергия одного фотона;  $A_{\text{вых}}$  – работа выхода электрона из металла;  $E_{\kappa}^{\text{max}}$  – максимальная кинетическая энергия вырванного электрона.

Чтобы задержать электроны, вырванные светом, необходимо приложить задерживающее напряжение (т. е. на освещаемый электрод подать положительный потенциал, а на неосвещаемый – отрицательный). При этом работа электрического поля приводит к изменению кинетической энергии электронов от  $E_{\kappa}^{\text{max}}$  до нуля:  $A = \Delta E_{\kappa}$ . Работа тормозящего электрического поля  $A = -|e|U_{\text{зод}}$  изменение энергии электрона  $\Delta E_{\kappa} = 0 - \frac{mv^2}{2}$ . Тогда можно рассчитать максимальную кинетическую энергию и скорость, которую получают электроны при вылете из металла

$$E_{\kappa}^{\text{max}} = \frac{mv^2}{2} = |e|U_{\text{зод}} \quad (2)$$

$$v = \sqrt{\frac{2|e|U_{\text{зод}}}{m}}, \quad (3)$$

где  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона по абсолютной величине.

Анализируя уравнение (1), замечаем, что при уменьшении частоты падающего света уменьшается энергия вырванных электронов, так как работа выхода остаётся постоянной ( $A_{\text{вых}}$  – табличная величина, определяемая только строением металла). Минимальная частота, при которой ещё возможен фотоэффект (т. е. красная граница фотоэффекта), очевидно, найдётся из условия  $E_{\kappa}^{\text{max}} = 0$ .

$$h\nu_{кр} = A_{вых}. \quad (4)$$

Уравнение Эйнштейна с учётом выражений (2) и (4) записывается

$$h\nu = h\nu_{кр} + |e|U_{зад}, \quad (5)$$

откуда

$$\nu_{кр} = \nu - \frac{|e|U_{зад}}{h}. \quad (6)$$

Произведём вычисления в системе СИ.

$$\nu_{кр} = 1,8 \cdot 10^{15} - \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,5}{6,63 \cdot 10^{-34}} = 1,8 \cdot 10^{15} - 0,6 \cdot 10^{15} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ (Гц)}.$$

Красная граница фотоэффекта может быть выражена через длину волны падающего света:

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{\nu_{кр}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,2 \cdot 10^{15}} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

По условию задачи требуется сравнить эту длину волны с длиной волны де Бройля для фотоэлектронов. Термин «длина волны» может быть использован в применении к микрочастицам вещества в связи с тем, что они обладают волновыми свойствами. По гипотезе де Бройля, волновые и корпускулярные характеристики микрочастиц связаны такими же соотношениями, как и для света, в частности для частицы, имеющей импульс  $p = m \cdot v$  длина волны де Бройля  $\lambda_{де-Бройля} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$ .

Учитывая, что скорость электрона в условиях рассматриваемой задачи может быть определена через задерживающую разность потенциалов по формуле (3), получим

$$\lambda_{де-Бройля} = \frac{h}{\sqrt{2|e|U_{зад} \cdot m}}. \quad (7)$$

Произведём вычисления в системе СИ

$$\lambda_{де-Бройля} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,5}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{8,53 \cdot 10^{-25}} = 0,78 \cdot 10^{-9} \text{ (м)}.$$

Определим, во сколько раз длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта, больше, чем длина волны де Бройля для электронов:  $\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda_{\text{де Бройля}}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-7}}{0,78 \cdot 10^{-9}} = 320$ .

**Ответ:**  $\nu_{\text{кр}} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Гц}; \frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda_{\text{де Бройля}}} = 320$ .

**Пример 5.** Пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов  $U = 1500 \text{ В}$ , попадает на экран осциллографа, образуя светящееся пятно радиусом  $r = 10^{-4} \text{ м}$ . С помощью напряжения, подаваемого на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины, его можно перемещать в любую точку экрана. Размер электронно-лучевой трубки в направлении движения электрона  $L = 0,2 \text{ м}$ . Можно ли рассчитывать перемещение электронов в этой ситуации по законам классической механики?

**Решение.** Классическая механика не учитывает волновые свойства микрочастиц, поэтому её применение позволяет получать результаты с ограниченной точностью. Минимальные погрешности, возникающие при этом, задаются соотношениями неопределённостей Гейзенберга:

$$p_x \Delta x \geq \hbar, \quad (1)$$

Определим импульс электрона. По теореме об изменении кинетической энергии,  $A = \Delta E$ . Работа электрического поля, ускоряющего движение электронов  $A = |e|U$ ,  $\Delta E = E - E_0$ . Полагая  $E_0 = 0$ , запишем:  $|e|U = E$ . Учитывая связь между кинетической энергией и импульсом  $E = \frac{p^2}{2m}$  получаем  $|e|U = \frac{p^2}{2m}$  откуда

$$p = \sqrt{2meU}. \quad (2)$$

Движение каждого отдельного электрона наблюдать невозможно, мы фиксируем результат действия многих электронов, попадающих на экран в пределах светящегося пятна



радиусом  $r$ , поэтому неопределённость импульса для каждого электрона составляет  $\Delta p_x$  (см. рис. 3.8). Из подобия треугольников, элементами которых являются  $p$  и  $\Delta p_x$ ,  $L$  и  $r$ , можно записать  $\frac{\Delta p_x}{p} = \frac{r}{L}$ , откуда

$$\Delta p_x = \frac{pr}{L}. \quad (3)$$

Из соотношения (1) минимальная погрешность при расчёте координаты электрона по законам классической механики найдётся следующим образом:

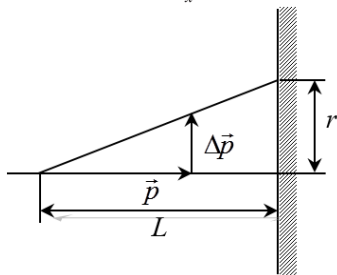


Рис. 3.8

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x}. \quad (4)$$

Подставим выражения (2) и (3) в уравнение (4):

$$\Delta x = \frac{\hbar L}{r\sqrt{2meU}}. \quad (5)$$

Произведём вычисления:

$$\Delta x = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 0,2}{10^{-4} \sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5 \cdot 10^3}} = \frac{1,33 \cdot 10^{-34}}{2,1 \cdot 10^{-28}} = 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

Полученное значение погрешности, с которой может быть определена координата электрона при применении законов классической механики, оказалось значительно меньше, чем размеры наблюдаемого на экране светящегося пятна  $r = 10^{-4}$  м.

**Ответ:** Данная задача может решаться без учёта волновых свойств электронов.

**Пример 6.** В модели строения атома Резерфорда предполагается, что электроны движутся вокруг ядра по замкнутым траекториям на некотором расстоянии от него. Скорость их движения имеет порядок  $10^6$  м/с, а размер атома –  $10^{-10}$  м.

Примем, что погрешность при определении импульса электрона составляет 10 %. Можно ли рассчитывать движение электрона в атоме по законам классической механики?

**Решение.** Так же, как в предыдущей задаче, оценим минимальные погрешности, возникающие при пренебрежении волновыми свойствами микрочастиц, на основании соотношений неопределённостей Гейзенберга:

$$p_x \Delta x \geq \hbar, \quad (1)$$

Определим импульс электрона и его погрешность:

$$p = mv; \Delta p_x = 0,1p = 0,1mv, \quad (2)$$

тогда погрешность при определении положения электрона относительно ядра найдётся как

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar}{0,1mv}. \quad (3)$$

Произведём вычисления:

$$\begin{aligned} \Delta x &= (6,63 \cdot 10^{-34}) : (0,1 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6) = \\ &= (6,63 \cdot 10^{-34}) : (9,1 \cdot 10^{-26}) = 7,3 \cdot 10^{-9} \text{ (м)}. \end{aligned}$$

По сравнению с предыдущей задачей, полученная погрешность на два порядка меньше, однако, для данной задачи она неприемлема, потому что превышает размеры самого атома ( $10^{-10}$  м). Данная задача должна решаться с учётом волновых свойств микрочастиц на основе законов квантовой механики.

Дополнение к рассмотренной задаче. Представим соотношение неопределенностей в виде  $\Delta(mv) \Delta x \geq \hbar$ , или  $\Delta x \cdot \Delta v \geq \frac{\hbar}{m}$ , откуда следует, что чем больше масса частицы, тем меньше неопределённость при расчете её координаты и скорости и, следовательно, с тем большей точностью можно применять к этой частице понятие траектории и законы классической механики. Другими словами, в макромире волновые свойства объектов не проявляются.

**Контрольные вопросы к разделу  
«Корпускулярно-волновой дуализм света  
и микрочастиц вещества»**

1. Как вы понимаете термин «Корпускулярно-волновой дуализм»? К каким материальным объектам относится этот термин?

2. Назовите явления, подтверждающие наличие волновых свойств у света.

3. Назовите явления, подтверждающие наличие волновых свойств у микрочастиц вещества.

4. Какое отношение к концепции корпускулярно-волнового дуализма имеет явление теплового излучения?

5. В чём сущность явления теплового излучения? Изобразите графически экспериментальный закон распределения энергии по длинам волн в спектре излучения абсолютно чёрного тела для двух разных температур. Опираясь на изображённый график, перечислите основные особенности явления (соответствующие законам Вина и Стефана – Больцмана).

6. При попытке применить волновые представления о природе света к объяснению закономерностей теплового излучения возникла ситуация, получившая название «ультрафиолетовая катастрофа». Какое противоречие связано с термином «ультрафиолетовая катастрофа»? В чём сущность гипотезы Планка, позволившей устранить это противоречие?

7. Какое отношение к концепции корпускулярно-волнового дуализма света имеет явление внешнего фотоэффекта?

8. В чём сущность явления внешнего фотоэффекта? Изобразите графически вольт-амперную характеристику фотоэффекта. Какие сведения о фотоэлектронах можно получить на основе вольт-амперной характеристики? Запишите соответствующие соотношения.

9. На основании законов экспериментально установленных Столетовым, можно сделать вывод, что энергия электронов, вылетевших из металла под действием света, не зависит от светового потока, т. е. от мощности излучения. Однако по волновым представлениям о природе света такая зависимость должна была существовать. Какое дополнение к гипотезе Планка пришлось сделать Эйнштейну, и какую дополнительную гипотезу о характере взаимодействия света с веществом он сформулировал, чтобы исключить противоречие теории и эксперимента при объяснении закономерностей фотоэффекта?

10. Что такое «красная граница фотоэффекта»? Используя гипотезу и уравнение Эйнштейна, объясните существование красной границы фотоэффекта и способ вычисления её числового значения.

11. Запишите формулы, связывающие волновые и корпускулярные свойства света. Какие характеристики света определяют его цвет и яркость согласно волновой модели? Какие характеристики света определяют его цвет и яркость согласно корпускулярной модели? Сравните массы фотонов для красного и фиолетового света.

12. Известно, что свет при падении на некоторую поверхность производит давление. С корпускулярной точки зрения это давление вызвано ударами фотонов и численно равно суммарному импульсу, который передают фотоны, падающие на единицу площади поверхности в единицу времени:  $P = \sum \frac{\Delta p_\phi}{S \cdot t}$  где  $\Delta p_\phi$  – изменение импульса одного фотона. Учитывая связь между волновыми и корпускулярными характеристиками света, определите, как изменится давление света при замене красного света на зелёный, если другие параметры света не меняются. Как изменится давление света, если, не меняя параметров света, заменить зеркально от-

ражающую поверхность на чёрную, поглощающую все излучение? Почему давление, производимое светом на поверхность, зависит от угла падения света?

**13.** Для микрочастиц вещества так же, как и для света характерен корпускулярно-волновой дуализм. В ряде явлений микрочастицы вещества проявляют только корпускулярные свойства (например, при движении электронов в электронно-лучевой трубке), и тогда при описании их движения допустимо использовать классические понятия «координата», «импульс», «траектория движения». Но в других условиях необходимо учитывать волновые свойства микрочастиц, тогда указанные понятия теряют смысл, в частности, для волны невозможно указать точную координату, поскольку у волны нет чёткой пространственной границы. Состояние движения микрочастицы с учётом её волновых свойств описывается волновой функцией (пси-функцией). Какую информацию о микрочастице несёт пси-функция? Каков физический смысл и свойства пси-функции? Как, зная  $\Psi$ -функцию, можно вычислить вероятность обнаружения микрочастицы в интересующей нас области пространства? Почему интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV$  принимается равным единице?

**14.** Двойственная природа микрочастиц позволяет использовать при описании их движения как волновые, так и корпускулярные характеристики, которые связаны между собой. Запишите формулы, отражающие связь волновых и корпускулярных характеристик микрочастиц. Как меняется длина волны де Бройля при увеличении скорости движения частицы? Почему для макротел нет смысла учитывать их волновые свойства (хотя они состоят из микрочастиц, обладающих такими свойствами)?

**15.** При решении задач о движении микрочастиц, необходимо сначала установить можно ли в описанной ситуации

ограничиться методами классической механики или нет. Этот вопрос решается на основе соотношений неопределённостей Гейзенберга. Какова принципиальная причина появления погрешностей при определении величин, входящих в соотношения Гейзенберга? Можно ли эти погрешности уменьшить, используя более точные измерительные приборы? В каком случае, зная, что произведённые расчёты будут иметь заведомую погрешность, можно решать задачу методами классической механики, пренебрегая волновыми свойствами микрочастиц?

*Рекомендуемая литература*

1. Савельев И. В. Курс общей физики. Т. 3: Оптика. Атомная физика. Физика ядра и элементарных частиц: учеб. пособие. – Санкт-Петербург: Лань, 2005. – 320 с.
2. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие. – Москва: Высшая школа, 2007. – 560 с.
3. Дмитриева В. Ф., Прокофьев В. Л. Основы физики: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Высшая школа, 2001. – 527 с.

## Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Квантовая механика изучает особенности движения микрочастиц, которые обусловлены наличием у них волновых свойств. Возникающие при этом специфические процессы происходят в небольших пространственных областях размером порядка  $10^{-8}$ – $10^{-15}$  м. Основные отличия этих процессов от явлений, наблюдаемых в макромире, состоят в следующем:

1) *эффект квантования*, выражающийся в том, что основные физические характеристики, описывающие состояние движения микрочастиц (энергия, момент импульса и др.), принимают не любые значения, а только некоторые из возможного диапазона значений; другими словами, в макромире мы обычно имеем дело с величинами, меняющимися непрерывно, а в микромире эти величины квантуются, т. е. принимают дискретный набор значений и меняются скачком при переходе из одного состояния в другое;

2) *эффект пространственной самоорганизации в системе микрочастиц*, состоящий в том, что вероятность обнаружения микрочастиц является функцией их координат, в каких-то точках пространства вероятность нахождения частиц большая, в то время как в других точках она может стремиться к нулю, вследствие этого в системе устанавливается определенный порядок в расположении частиц. В макроскопических областях (например, при рассмотрении распределения молекул газа по объёму в сосуде) вероятность обнаружения частиц одинакова во всех точках, т. е. движение молекул в сосуде беспорядочное, хаотическое.

В гл. 3 было введено понятие «*волновая функция (или  $\psi$ -функция) микрочастицы*», которая отражает наличие волновых свойств у частиц вещества и связана с вероятностью их обнаружения в интересующем нас объёме пространства. Для свободной частицы эта функция имеет вид

$$\psi = A \cos\left(\frac{Et}{\hbar} - \frac{px}{\hbar}\right) + iA \sin\left(\frac{Et}{\hbar} - \frac{px}{\hbar}\right), \text{ или } \psi = Ae^{-i\left(\frac{Et}{\hbar} - \frac{px}{\hbar}\right)}.$$

Следующая задача состоит в том, чтобы научиться рассчитывать  $\psi$ -функцию *при наличии определённых воздействий* на частицу, объяснять и рассчитывать возможные наблюдаемые эффекты, являющиеся следствием наличия волновых свойств у микрочастиц.

#### 4.1. Основной закон квантовой механики

Основной закон квантовой механики – уравнение Шредингера – позволяет определять вид  $\psi$ -функции и условия квантования некоторых характеристик микрочастиц (т. е. формулы для расчёта дискретного спектра (набора) значений рассматриваемой величины) при заданных воздействиях на частицу со стороны других частиц или полей. При этом воздействия должны быть заданы по условию задачи в виде потенциальной энергии.

Дифференциальное уравнение Шредингера в общем виде записывается так:

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\Delta\psi + U(x, y, z, t)\psi = i\hbar\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right),$$

где  $m$  – масса частицы;  $i$  – мнимая единица;  $\Delta$  – оператор Лапласа

$\left(\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$ ,  $U(x, y, z, t)$  – потенциальная энергия частицы в силовом поле.

В дальнейшем будут рассматриваться только стационарные задачи, для которых потенциальная энергия не зависит от времени.



Уравнение Шредингера для стационарных состояний имеет вид:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar}(E - U)\psi = 0, \quad (4.1)$$

где  $m$  – масса частицы;  $E$  – полная энергия частицы;  $U$  – потенциальная энергия взаимодействия частицы с другими частицами или полями.

Из математики известно, что дифференциальные уравнения имеют множество решений, причём любая линейная комбинация этих решений также является решением уравнения. Это значит, что при одной и той же полной энергии микрочастица может находиться в нескольких разных квантовых состояниях, подчиняющихся принципу суперпозиции. Но при этом физический смысл имеют только такие решения уравнения Шредингера, для которых  $\psi$ -функция конечна, однозначна, непрерывна и нормируема.

#### 4.1.1. Уравнение Шредингера.

##### *Частица в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме*

Рассмотрим одномерное движение микрочастицы (вдоль оси  $x$ ), когда её потенциальная энергия задаётся функцией, графически представленной на рис. 4.1 и имеющей вид прямоугольной ямы с бесконечно высокими «стенками». Аналитически эта функция определяется следующим образом:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq l, \\ \infty & \text{при } x > l. \end{cases}$$

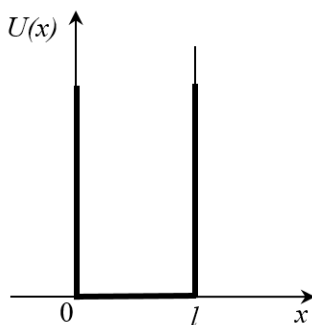


Рис. 4.1

Запишем уравнение Шредингера для частицы, находящейся внутри ямы, т. е. в области, где  $U(x) = 0$ :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad (4.2)$$

и введём обозначения

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = \omega^2, \quad (4.3)$$

тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \omega^2 \psi = 0. \quad (4.4)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что решением данного уравнения является гармоническая функция

$$\psi = A \sin(\omega x + \varphi). \quad (4.5)$$

Коэффициенты  $\omega$  и  $\varphi$  найдём из условия непрерывности  $\psi$ -функции. За пределами ямы вероятность обнаружения частицы, а значит и  $\psi$ -функция равны нулю (потенциальный барьер бесконечен  $U = \infty$ ), внутри ямы  $\psi$ -функция отлична от нуля, но т. к. она не может изменяться скачком, то в точках  $x = 0$  и  $x = l$  она должна оставаться равной нулю:

–  $\Psi(0) = A \sin \varphi = 0$ , откуда  $\sin \varphi = 0$  и в простейшем варианте  $\varphi = 0$ ;

–  $\Psi(l) = A \sin \omega l = 0$ , но здесь полагать  $\omega l = 0$  нельзя, т. к. это означало бы, что внутри ямы вероятность обнаружения частицы равна нулю, т. е. частицы там не существует. Тогда остаётся вариант  $\omega l = n\pi$ , где  $n \neq 0$  и принимает только целочисленные значения  $n = 1, 2, 3$  и т. д. Из последнего равенства вытекает, что коэффициент  $\omega = \frac{n\pi}{l}$ . С найденными коэффициентами, уравнение (4.5) можно записать

$$\psi = A \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right). \quad (4.6)$$

Коэффициент  $A$  найдём из условия нормировки  $\psi$ -функции. По условию задачи движение частицы возможно только вдоль оси  $x$  в пределах отрезка  $0 \leq x \leq l$ , поэтому условие нормировки запишем в виде

$$\int_0^l |\psi|^2 dx = 1, \text{ или } A \int_0^l \sin^2 \left( \frac{n\pi}{l} x \right) dx = 1. \quad (4.7)$$

По теореме о среднем

$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \left\langle \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \right\rangle \cdot \Delta x = \left\langle \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \right\rangle \cdot l$ . Учитывая, что среднее значение функции синус квадрат на отрезке  $l$  равно 0,5, получим  $A^2 \cdot \left\langle \sin^2 \left( \frac{n\pi}{l} x \right) \right\rangle \cdot l = 1$ , или  $A^2 \cdot 0,5l = 1$ , откуда  $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$ .

Окончательно решение уравнения Шредингера для рассматриваемой задачи принимает вид

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \left( \frac{n\pi}{l} x \right). \quad (4.8)$$

Подставляя в выражение (4.3) найденное значение коэффициента  $\omega = n\pi/l$ , находим полную энергию частицы в потенциальной яме:

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} \cdot n^2. \quad (4.9)$$

Принципиально важной особенностью полученных решений уравнений (4.8) и (4.9) является то, что в них присутствует так называемое *квантовое число* ( $n$ ), которое не может быть равно нулю ( $n \neq 0$ ) и принимает дискретный ряд значений  $n = 1, 2, 3$  и т. д.

Физический смысл полученных решений можно про-

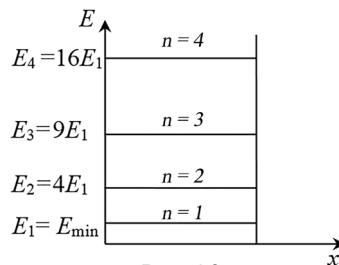


Рис. 4.2

иллюстрировать графически. На рис. 4.2 представлен *дискретный спектр значений энергии* частицы, находящейся в потенциальной яме, причём в уравнении (4.9) полная энергия частицы  $E$  совпадает с её кинетической энергией, поскольку по условию потенциальная энергия внутри ямы равна нулю. Отметим ряд особенностей этого спектра:

- кинетическая энергия частицы не может быть равной нулю ( $n \neq 0$ ), микрочастицу нельзя остановить. Это значит, что движение – неотъемлемое свойство микрочастиц, микрочастицы не могут существовать без движения;

- минимально возможное значение кинетической энергии получается при  $n = 1$  и равно  $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2}$ .

Ближайшее следующее значение при  $n = 2$  равно  $E_2 = 4E_1$ , затем при  $n = 3$  равно  $E_3 = 9E_1$  и т. д. Промежуточных значений энергии не существует, в этом проявляется

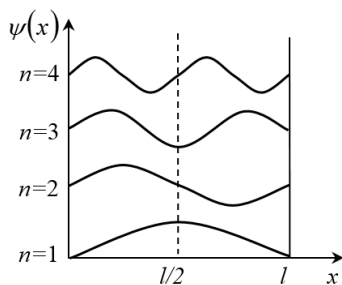


Рис. 4.3

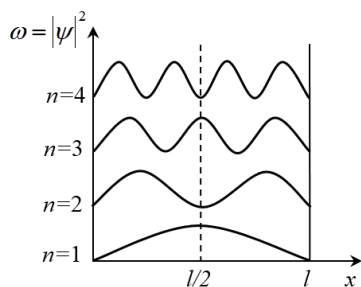


Рис. 4.4

указанный во введении к данной главе *эффект квантования* – энергия микрочастицы квантуется;

- по мере увеличения квантового числа разность энергий двух соседних «разрешённых» уровней увеличивается;

- при переходе частицы из одного состояния в другое её энергия изменяется скачком, а не непрерывно, как это имеет место в макром мире.

На рис. 4.3 представлена зависимость  $\psi$ -функции от координаты частицы при разных значениях квантового числа  $n$ , а на рис. 4.4 – вид функции  $|\psi|^2$ , которая определяет плотность вероятности обнаружения микрочастицы в разных точках потенциальной ямы. Основная информация, содержащаяся в этих рисунках, состоит в следующем:

1. В соответствии с условием непрерывности  $\psi$ -функции, на концах ямы (т. е. в точках  $x = 0$  и  $x = l$ ) её значение всегда равно нулю.

2. Количество длин полувольт, соответствующих этой функции (количество полувольт де Бройля), укладывающихся на ширине потенциальной ямы, совпадает со значением квантового числа  $n$  для рассматриваемого состояния микрочастицы (доказательство этого утверждения рассмотрено в примере решения задачи 2 гл. 4).

3. Плотность вероятности обнаружения частицы, находящейся, к примеру, в состоянии с главным квантовым числом  $n = 2$ , в центре ямы равна нулю, в то же время частица одинаково часто бывает как в левой, так и в правой половине ямы. Такое поведение частицы явно не совместимо с представлением о траектории движения.

4. Для частицы, находящейся в состоянии с квантовым числом  $n = 1$ , плотность вероятности её обнаружения максимальна в середине ямы (при  $x = l/2$ ), в то время как для частицы с  $n = 2$  в той же точке плотность вероятности равна нулю, при  $n = 3$  есть три точки с максимальной вероятностью обнаружения частицы ( $x_1 = l/3$ ,  $x_2 = l/2$ ,  $x_3 = 2l/3$ ) и т. д. Это означает, что, если в яме будет находиться несколько частиц, то их расположение окажется упорядоченным, а не хаотическим. В этом проявляется *эффект пространственной самоорганизации* в системе микрочастиц.

Таким образом, на примере решённой задачи мы видим, что поведение микрочастиц существенным образом отличается от поведения макротел и различие это обусловлено наличием волновых свойств у микрочастиц вещества.

#### **4.1.2. Уравнение Шредингера. Частица в трёхмерном прямоугольном потенциальном ящике**

Предположим, что частица может двигаться не только вдоль оси  $x$ , но и в других направлениях при условии, что её потенциальная энергия при изменении положения в направлении любой координатной оси задаётся таким же образом, как в предыдущей задаче:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq l_1, \\ \infty & \text{при } x > l_1. \end{cases} \quad U(y) = \begin{cases} \infty & \text{при } y < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq y \leq l_2, \\ \infty & \text{при } y > l_2. \end{cases}$$

$$U(z) = \begin{cases} \infty & \text{при } z < 0, \\ 0 & \text{при } 0 \leq z \leq l_3, \\ \infty & \text{при } z > l_3. \end{cases}$$

где  $l_1, l_2, l_3$  – размер «потенциального ящика» по каждой из осей.

Учитывая принцип независимости движений, получим, как и в случае одномерного движения, условия квантования энергии для каждого из возможных направлений движения:

$$\varepsilon_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml_1^2} \cdot n_1^2, E_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml_2^2} \cdot n_2^2, E_3 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml_3^2} \cdot n_3^2.$$

Тогда полная энергия частицы найдётся как сумма этих энергий. Если взять ситуацию, когда  $l_1 = l_2 = l_3 = l$ , то

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} \cdot (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (4.10)$$

Из полученного уравнения следует, что в случае *неодномерного движения* состояние микрочастицы характеризуется не одним квантовым числом, а *набором квантовых чисел* ( $n_1, n_2, n_3$ ) каждое из которых имеет дискретный ряд значений.

### 4.1.3. Электрон в атоме водорода:

#### *элементы квантовой теории строения атома водорода*

Рассмотрим особенности движения электрона в простейшем атоме – в атоме водорода. Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром атома определяется следующим образом:

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ze^2}{r}, \quad (4.11)$$

где  $e$  – заряд электрона;  $ze$  – заряд ядра;  $z$  – порядковый номер элемента в таблице Менделеева (для атома водорода  $z = 1$ );  $r$  – расстояние электрона от ядра. Как видно, зависимость  $U(r)$  гиперболическая, графически она представлена на рис. 4.5.

Рассматриваемая задача стационарная и одномерная, поэтому основной закон квантовой механики запишется в виде

$$\Delta\psi = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E - U)\psi = 0.$$

С учётом выражения (4.11),

$$\Delta\psi = \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \left( E + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0. \quad (4.12)$$

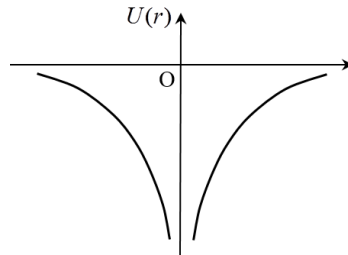


Рис. 4.5

Решение данного дифференциального уравнения представляет определенные математические трудности, поэтому ограничимся обсуждением конечных результатов.

### *Квантовые числа*

В связи с неоднородностью рассматриваемой задачи состояние электрона в атоме определяется *набором квантовых чисел*, каждое из которых несёт двойную информацию. Во-первых, квантовые числа входят в уравнения, определяющие условия квантования энергии, а также некоторых других характеристик электрона в атоме. Во-вторых, они входят в уравнения, определяющие вид  $\psi$ -функции электрона, а значит, несут информацию о вероятности нахождения электрона в разных точках, т. е. об особенностях пространственной структуры атома.

*Главное квантовое число* ( $n$ ) определяет условие квантования полной энергии электрона в атоме и наиболее вероятное расстояние электрона от ядра:

$$E = -\frac{mz^2e^4}{8\varepsilon_0^2h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (4.13)$$

$$r_{\text{н.в.}} = -\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{mze^2} \cdot n^2. \quad (4.14)$$

Главное квантовое число может принимать дискретный ряд значений:  $n = 1, 2, 3, \dots$  и  $n \neq 0$ .

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной. Кинетическая энергия всегда имеет положительные значения, а знак потенциальной энергии зависит от знаков зарядов взаимодействующих частиц. В случае взаимодействия электрона с ядром потенциальная энергия отрицательна (см. рис. 4.5), что отражает существование сил притяжения между этими частицами. Знак «минус» в форму-



ле для полной энергии (4.13) свидетельствует о том, что потенциальная энергия больше, чем кинетическая, т. е. электрон движется, оставаясь в составе атома. Оторваться от атома электрон может при условии, что его кинетическая энергия станет больше потенциальной, а полная энергия окажется положительной. Однако при таких условиях реше-

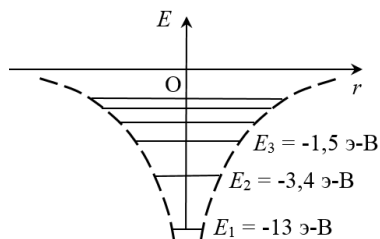


Рис. 4.6

ние уравнения Шредингера приводит к выводу, что энергия свободно движущегося электрона не квантуется.

Минимальное значение энергии, которое может иметь электрон в атоме водорода, вычисленное по формуле (4.13) при  $n = 1$ , равно  $E_{\min} = -21,76 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -13,6 \text{ эВ}$ . При  $n = 2$   $E_2 = E_{\min} / 4 = -5,44 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = -3,4 \text{ эВ}$  и т. д. На рис. 4.6 видно, что по мере увеличения главного квантового числа разность энергий двух соседних «разрешённых» энергетических уровней уменьшается.

Минимальное значение наиболее вероятного расстояния электрона от ядра, вычисленное по формуле (4.14) при  $n = 1$ , равно  $r_{\min} = 0,51 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ , что принимается за размер атома. При  $n = 2$  наиболее вероятное расстояние электрона от ядра в четыре раза больше минимального:  $r_2 = 4r_{\min}$ ; при  $n = 3$   $r_3 = 9r_{\min}$  и т. д. Уравнение (4.14) называют *условием пространственного квантования*.

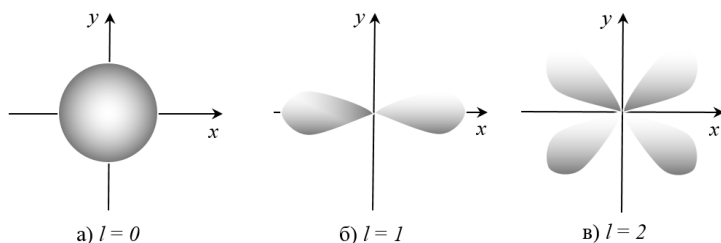
Орбитальное квантовое число ( $l$ ) определяет условие квантования орбитального момента импульса электрона (см. 4.15) и форму «электронного облака»:

$$L^{\text{орб}} = \hbar \sqrt{l(l+1)}. \quad (4.15)$$

Как говорилось ранее, понятие «траектория движения» в квантовой механике не имеет смысла, однако, оценивая на основе найденной  $\psi$  – функции вероятность обнаружения электрона в той или иной области пространства внутри атома, можно определить геометрическое место точек с максимальной вероятностью, т. е. форму «электронного облака». Эта форма оказывается разной при разных значениях главного и орбитального квантовых чисел. Например, для  $n = 1$  и  $l = 0$  решение уравнения Шредингера имеет вид

$$\psi = Ce^{-r/a}, \quad (4.16)$$

откуда видно, что пси-функция, а значит и максимальная вероятность обнаружения электрона на расстоянии  $r$  от ядра одинакова по всем направлениям, что соответствует сферически симметричному «электронному облаку» (см. рис. 4.7 а).



**Рис. 4.7**

Орбитальное квантовое число может принимать дискретный ряд значений:  $l = 0, 1, 2, 3, \dots (n - 1)$ , т. е. всего  $n$  возможных значений.

Состояния электрона в атоме в зависимости от значения орбитального квантового числа принято обозначать буквами:  $s$ -состояние ( $l = 0$ ),  $p$ -состояние ( $l = 1$ ),  $d$ -состояние ( $l = 2$ ),  $f$ -состояние ( $l = 3$ ) и т. д.

На рис. 4.7 представлены формы «электронного облака» при некоторых значениях орбитального квантового числа.

Формула (4.14) справедлива для сферически симметричного «электронного облака».

**Магнитное квантовое число ( $m$ )** определяет условие квантования проекции орбитального момента импульса электрона на направление внешнего поля (см. выражение (4.17)) и пространственную ориентацию «электронного облака» в этом поле.

Известно, что при помещении в магнитное поле на любую заряженную частицу действуют силы, изменяющие характер движения частицы. Из решения уравнения Шредингера следует, что вектор орбитального момента импульса электрона в атоме может иметь лишь такую ориентацию в пространстве, при которой его проекция на направление внешнего магнитного поля принимает значения, кратные постоянной Планка:

$$L_z^{\text{орб}} = m\hbar. \quad (4.17)$$

Магнитное квантовое число может принимать следующие значения:  $m = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots, \pm l$ , т. е. всего  $(2l + 1)$  значений.

На рис. 4.8 представлены возможные ориентации орбитального момента импульса электрона, находящегося в состоянии с орбитальным квантовым числом  $l = 2$ , по отношению к направлению внешнего магнитного поля, которое совпадает с осью  $z$ .

Для такого состояния, согласно выражению (4.15), орбитальный момент импульса  $L^{\text{орб}} = \hbar\sqrt{6} = 2,45\hbar$ , а на основании уравнения (4.17), его проекция на это направление может иметь пять значений:  $L_z^{\text{орб}} = 0, +\hbar, -\hbar, +2\hbar, -2\hbar$ .

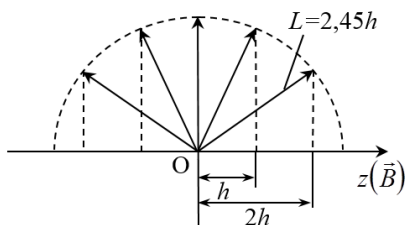


Рис. 4.8

**Спиновое квантовое число ( $S$ )** определяет условие квантования собственного момента импульса электрона:

$$L_s = \hbar \sqrt{S(S+1)}. \quad (4.18)$$

Электрон помимо орбитального момента импульса, связанного с его движением относительно ядра атома, обладает собственным моментом импульса (спином) даже в свободном состоянии. Спин является одной из фундаментальных характеристик микрочастиц наряду с массой и зарядом. Спин так же, как и орбитальный момент, квантуется, но при этом спиновое квантовое число имеет всего одно возможное значение  $S = 1/2$ . В связи с чем, электроны называются частицами с полуцелым спином.

**Магнитное спиновое число ( $m_s$ )** определяет числовое значение проекции спина на направление внешнего магнитного поля, а значит и его ориентацию в этом поле. Условие квантования проекции спина записывается следующим образом:

$$(L_s)_z = m_s \hbar, \quad (4.19)$$

где  $m_s$  принимает два возможных значения:  $m_s = +1/2$  или  $-1/2$ .

Из перечисленных пяти квантовых чисел для однозначного описания состояния электрона в атоме достаточно указать четыре, обычно выбирают:

- главное квантовое число;
- орбитальное квантовое число;
- магнитное квантовое число;
- магнитное спиновое квантовое число.

При одном и том же главном квантовом числе, т. е. при одной и той же полной энергии электрон может находиться в разных квантовых состояниях, отличающихся друг от друга значениями орбитального момента импульса, а также ориентацией орбитального и собственного момента импульса в

пространстве. С учётом значений, которые могут принимать квантовые числа, общее количество разных квантовых состояний электрона в атоме при значении квантового числа  $n$  определится следующим образом:  $N = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2$ .

Для примера в табл. 4.1 приведены возможные квантовые состояния электрона в атоме водорода при значении главного квантового числа  $n = 2$  и его физические характеристики в этих состояниях, вычисленные по условиям квантования выражений (4.13), (4.15), (4.17). (4.19).

Таблица 4.1

**Возможные квантовые состояния электрона в атоме водорода и его физические характеристики**

Номер состояния	Квантовые числа				Физические характеристики			
	$n$	$l$	$m$	$m_s$	$E$	$L^{orb}$	$L_z^{orb}$	$(L_s)_z$
1	2	0	0	+1/2	-3,4эВ	0	0	+ħ/2
2	2	0	0	-1/2	-3,4эВ	0	0	-ħ/2
3	2	1	0	+1/2	-3,4эВ	1,4ħ	0	+ħ/2
4	2	1	0	-1/2	-3,4эВ	1,4ħ	0	-ħ/2
5	2	1	+1	+1/2	-3,4+ΔE	1,4ħ	+	+ħ/2
6	2	1	+1	-1/2	-3,4+ΔE	1,4ħ	+	-ħ/2
7	2	1	-1	+1/2	-3,4-ΔE	1,4ħ	-	+ħ/2
8	2	1	-1	-1/2	-3,4-ΔE	1,4ħ	-	-ħ/2

Обратим внимание, что в состояниях 5–8 (см. табл. 4.1) энергия электрона может несколько отличаться от энергии, вычисленной по уравнению (4.13). Это происходит потому, что электрон, обладающий механическим моментом импульса  $L^{orb}$ , одновременно обладает магнитным моментом  $p_m = \frac{e}{m} L^{orb}$  а значит, при помещении в магнитное поле приобретает дополнительную энергию  $\Delta E = -(p_m)_z B = \frac{e}{m} L_z^{orb} B$ . Как видим, эта энергия зависит от проекции момента импульса электрона на направление внешнего поля. Когда эта проекция равна нулю (состояния 1–4 в табл. 4.1), никакой добавки к энергии электрона нет. Рассмотренную ситуацию

принято описывать так: при помещении атома в магнитное поле происходит расщепление энергетических уровней на подуровни в соответствии с возможными значениями маг-

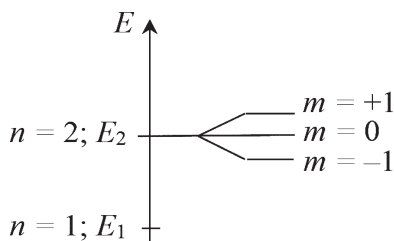


Рис. 4.9

нитного квантового числа (эффект Зеймана). Для квантовых состояний, представленных в табл. 1, расщепление энергетического уровня с главным квантовым числом  $n = 2$  схематически изображено на рис. 4.9.

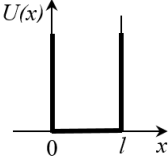
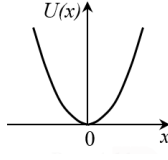
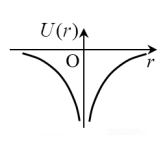
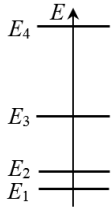
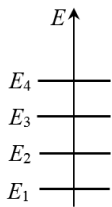
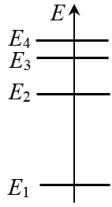
*Примечание:* Расщепление энергетических уровней при помещении атома в магнитное поле может происходить также в связи с наличием у электронов собственного механического и магнитного момента (тонкая структура энергетических уровней).

В табл. 4.2 для сравнения приведены условия квантования энергии для микрочастиц, находящихся в разных условиях.

Таблица 4.2

#### Простейшие задачи квантовой механики

Информация о частице	Задача о частице в прямоугольной одномерной потенциальной яме	Задача о частице в параболической потенциальной яме (гармонический осциллятор)	Задача о частице в гиперболической потенциальной яме (электрон в атоме)
Зависимость потенциальной энергии от положения частицы	$U(x) = \infty$ при $x < 0$ $U(x) = 0$ при $x \leq l$ $U(x) = \infty$ при $x > 0$	$U(x) = \frac{kx^2}{2} =$ $= \frac{m\omega^2 x^2}{2}$	$U(r) = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$

График зависимости $U(x)$ , (т. е. вид потенциальной ямы)	 <b>Рис. 4.10</b>	 <b>Рис. 4.11</b>	 <b>Рис. 4.12</b>
Запись уравнения Шредингера для рассматриваемой задачи	$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$	$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \times \times \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi = 0$	$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \times \times \left( E + \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$
Условие квантования энергии частицы	$E = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ml^2}$	$E = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega$	$E = \frac{mz^2 e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$
Энергетический спектр квантовых состояний частицы (графически)	 <b>Рис. 4.13</b>	 <b>Рис. 4.14</b>	 <b>Рис. 4.15</b>

#### 4.1.4. Излучение и поглощение электромагнитной энергии атомами вещества

В гл. 3.1 было описано тепловое излучение твёрдых тел, главной особенностью которого является то, что в нём присутствуют разные длины волн – *сплошной спектр излучения*. Твёрдое тело – это макросистема, состоящая из множества атомов. Волновые свойства микрочастиц, из которых состоят атомы, в макротелах не проявляются. В данном разделе рассматривается излучение вещества, находящегося в ато-

марном (газообразном) состоянии, при котором атомы находятся друг от друга на большом расстоянии так, что их взаимодействием можно пренебречь. В такой ситуации наличие волновых свойств у микрочастиц вещества существенным образом меняет характер излучения.

Состояния электронов в атоме, удовлетворяющие условиям квантования энергии выражения (4.13), будем называть стационарными. Все атомы одного и того же химического элемента имеют одинаковый набор стационарных состояний. Состояние с минимальной энергией (с главным квантовым числом  $n = 1$ ) называется невозбуждённым состоянием, в этом состоянии атом может находиться сколь угодно долго. Все остальные состояния являются возбуждёнными. Для перехода в любое из возбуждённых состояний атом должен поглотить энергию (например, при столкновении со свободно движущейся частицей, при нагревании вещества, при его облучении светом). Среднее время жизни атома в возбуждённом состоянии составляет  $10^{-8}$  с, после которого происходит самопроизвольный переход атома в невозбуждённое состояние сразу или через последовательность промежуточных состояний с меньшей энергией.

*Основные положения квантовой теории, касающиеся процессов излучения и поглощения электромагнитной энергии атомами вещества (Постулаты Бора)*

1. Находясь в стационарном состоянии, атом не излучает и не поглощает энергию.
2. Излучение или поглощение происходит при переходе электрона из одного состояния в другое.
3. При каждом переходе излучается или поглощается только один фотон с энергией  $h\nu$ :

$$h\nu = E_n - E_m. \quad (4.20)$$



Описанный механизм излучения иллюстрируется рис. 4.16.

Фотон, так же как и электрон, обладает спином (собственным моментом импульса), поэтому, на основании закона сохранения момента импульса, излучение и поглощение фотона должно сопровождаться изменением момента импульса атома, а значит изменением орбитального квантового числа. В связи с этим возникает, так называемое, *правило отбора*.

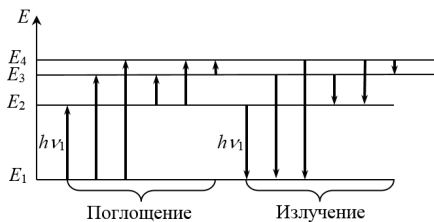


Рис. 4.16

В атоме возможны только такие переходы из одного состояния в другое, при которых орбитальное квантовое число изменяется на единицу:

$$\Delta l = \pm 1. \quad (4.21)$$

Следствия из уравнения (4.20), которое принято называть вторым постулатом Бора, состоят в следующем:

1. Поскольку энергия электрона в атоме квантуется, т. е. принимает дискретный ряд значений, то и излучаемые частоты имеют не сплошной, а *линейчатый спектр* значений.

2. Если электрон переходит из состояния с энергией  $E_m$  в состояние с энергией  $E_n$ , возникает излучение с частотой  $\nu_1$ . Если же переход происходит в обратном направлении (с уровня  $E_n$  на уровень  $E_m$ ), то атом поглощает излучение с той же самой частотой  $\nu_1$ , поскольку разность значений энергий при этом остаётся одинаковой по абсолютной величине. *Спектр излучения совпадает со спектром поглощения.*

3. Для атомов разных химических элементов набор «разрешённых» значений энергий стационарных состояний раз-

личен, поэтому *каждый химический элемент имеет свой характерный спектр излучения и поглощения*. Это позволяет производить спектральный анализ химического состава вещества.

Особенности спектра излучения атомов водорода, вытекающие из изложенной теории, проанализированы в гл. 4.3 (см. пример 4 гл. 4.3).

## **4.2. Описание движения систем взаимодействующих частиц в квантовой механике**

Поведение систем, состоящих из большого количества элементов, подчиняется статистическим законам. В первой части настоящего пособия были рассмотрены некоторые законы классической статистики в применении к теории молекулярного строения вещества (распределение Максвелла-Больцмана). Поведение микрочастиц, проявляющих волновые свойства, имеет свои специфические особенности и описывается квантовой статистикой. Одним из следствий квантовой статистики в применении к группе частиц с полуполным спином является принцип Паули.

### ***4.2.1. Принцип Паули. Многоэлектронные атомы***

Свободные атомы можно рассматривать как системы из нескольких одинаковых элементарных частиц – электронов, взаимодействующих между собой и находящихся во внешнем потенциальном поле ядра. Поведение такой системы можно было бы описать с помощью волновой функции для системы частиц. Однако точное решение уравнения Шрёдингера в данном случае практически недостижимо. Поэтому в подобных задачах используются приближённые методы решения волнового уравнения. Использование таких мето-

дов применительно к атому приводит к необходимости выполнения принципа Паули, который является одним из основных законов квантовой механики.

**Принцип Паули:** В системе частиц с полупелым спином не может существовать двух частиц с одинаковым набором четырёх квантовых чисел:  $n$ ;  $l$ ;  $m$ ;  $m_s$ . Иными словами, в атомах вещества в одном квантовом состоянии, характеризуемым тремя квантовыми числами  $(n, l, m)$ , может находиться не более двух электронов с антипараллельными спинами ( $m_s = \pm 1/2$ ).

Совокупность электронов в атоме, имеющих одинаковые значения квантового числа  $n$ , образует оболочку. Внутри оболочки электроны с различными квантовыми числами  $l$  образуют подоболочки. Обозначение оболочки и подоболочки представлено в табл. 4.3 и 4.4.

Таблица 4.3

**Обозначение оболочки**

Значение $n$	1	2	3	4	5
Обозначение оболочки	$K$	$L$	$M$	$N$	$O$

Таблица 4.4

**Обозначение подоболочки**

Значение $l$	0	1	2	3
Обозначение подоболочки	$s$	$p$	$d$	$f$

Поскольку число  $m$  принимает  $2l + 1$  значений, то число электронов в подоболочке  $l$  с учётом спина равно  $N_l = 2(2l + 1)$ . Таким образом, в подоболочке  $s$  может находиться не более 2 электронов, в подоболочке  $p$  – не более 6, в  $d$  – не более 10, в  $f$  – не более 14 электронов.

Максимальное число электронов в оболочке с квантовым числом  $n$  равно  $N_n = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l + 1) = 2n^2$ , откуда следует, что

в  $K$ -оболочке ( $n = 1$ ) может находиться 2 электрона, в  $L$ -оболочке ( $n = 2$ ) – 8 электронов, в  $M$ -оболочке ( $n = 3$ ) – 18 электронов и в  $N$ -оболочке ( $n = 4$ ) – 32 электрона.

Электроны в атомах обычно последовательно заполняют электронные оболочки. Напомним, что с ростом главного квантового числа  $n$  возрастает наиболее вероятное расстояние от ядра до электрона в соответствующей оболочке. Это означает, что распределение электронов вокруг ядра атома не является хаотическим, а образует определенную пространственную структуру. В табл. 4.5 показано распределение электронов по оболочкам для некоторых химических элементов.

Таблица 4.5

Распределение электронов по оболочкам

Химический элемент	Порядковый номер и общее число электронов	Число электронов в $K$ -оболочке	Число электронов в $L$ -оболочке	Число электронов в $M$ -оболочке	Валентность
<i>H</i>	1	<b>1</b>			1
<i>Li</i>	3	2	<b>1</b>		1
<i>Na</i>	11	2	8	<b>1</b>	1
<i>Be</i>	4	2	<b>2</b>		2
<i>Mg</i>	12	2	8	<b>2</b>	2

Как видно из табл. 4.3, атомы водорода, лития и натрия имеют по одному электрону на внешней оболочке и валентность равную единице. У атомов бериллия и магния на внешней оболочке два электрона и валентность равна двум и т. д. Таким образом, периодическая повторяемость химических свойств элементов, открытая Менделеевым, является следствием периодической повторяемости пространственной структуры атомов. А периодическая повторяемость пространственной структуры, в свою очередь, обусловлена действием одного из основных законов квантовой механики – принципа Паули.

#### 4.2.2. Элементы зонной теории проводимости кристаллов

##### Энергетические зоны в кристаллах

Твёрдые тела, к которым относятся металлы, диэлектрики и полупроводники, имеют обычно кристаллическую структуру. В кристаллах атомы располагаются упорядоченно в пространстве, образуя кристаллическую решётку. Расстояние между соседними атомами в кристаллах составляет несколько ангстрем ( $1\text{Å} = 10^{-10}\text{ м}$ ). При образовании кристалла энергетические уровни атомов расщепляются, образуя энергетические зоны (см. рис. 4.17).

Существование энергетических зон в кристаллах непосредственно следует из решения уравнения Шрёдингера (4.1) для электрона, движущегося в периодическом силовом поле, образованном кристаллической решёткой  $U(r)$ . Точное определение функции  $U(r)$  для реальных кристаллов представляет большие трудности. Поэтому для анализа основных закономерностей поведения электронов в решётке пользуются упрощёнными моделями.

Пусть имеется  $N$  изолированных атомов некоторого вещества. Энергетические уровни их одинаковы и одинаково заполнены электронами (см. рис. 4.17). Если сближать атомы, между ними возникает всё усиливающееся взаимодействие, приводящее к изменению положения уровней. Вместо каждого уровня энергии в атоме возникает  $N(2l + 1)$  близких, но не совпадающих уровней, ( $l$  – орбитальное квантовое число).

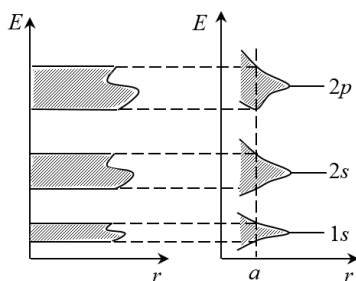


Рис. 4.17

Например, электронный уровень  $1s$  даёт в кристалле зону  $1s$  при  $r = a$  (см. рис. 4.17), уровням  $2s$  и  $2p$  в атоме соответствуют зоны  $2s$  и  $2p$  в кристалле и т. д. Количество зон равно числу электронных уровней в атоме.

Наибольшее влияние поле решётки оказывает на внешние валентные электроны, поэтому валентные уровни и более высокие свободные уровни испытывают наиболее сильное расщепление и расширение. Уровни занятые внутренними электронами расщепляются слабо.

Зоны разрешённых энергий разделены запрещёнными зонами (см. незаштрихованные области на рис. 4.17). Электроны в кристалле не могут принимать значение энергии, соответствующее запрещённой зоне.

Ширина зон для кристалла данного вещества является постоянной. Следовательно, чем больше атомов в кристалле  $N$ , тем теснее расположены уровни в зоне. Обычно ширина запрещённых зон – порядка нескольких электронвольт. В  $1 \text{ см}^3$  твёрдого тела содержится  $\sim 10^{23}$  атомов, тогда расстояние между соседними уровнями в зоне  $\sim 10^{-23}$  эВ. Это энергетическое расстояние очень мало, так что зоны можно считать квазинепрерывными.

Согласно принципу Паули, на каждом уровне в зоне может находиться лишь два электрона с противоположными спинами.

*Валентной зоной* называется зона разрешённых значений энергии для электронов в кристалле, возникшая из того уровня энергии изолированного атома, на котором находятся валентные электроны.

*Зоной проводимости* называется зона разрешённых значений энергии для электронов в кристалле, возникшая из уровня энергии изолированного атома, расположенного выше валентного уровня и не занятого электронами.

*Запрещённая зона* – это зона запрещённых значений энергии  $\Delta E$  для электронов в кристалле.

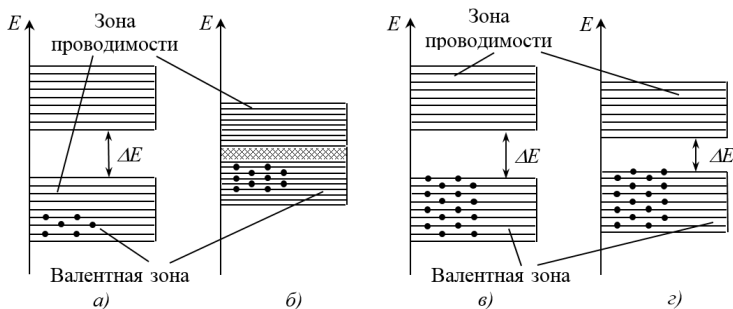
Как правило, структура этих трёх зон (зоны проводимости, валентной зоны и разделяющей их запрещённой зоны) и степень их заполнения электронами определяют электрофизические свойства твёрдых тел. Поэтому данные три зоны в твёрдых телах представляют наибольший интерес.

*Заполнение энергетических зон электронами.*

*Классификация веществ по электрическим свойствам*

Существование энергетических зон в твёрдых телах позволяет объяснить с единой точки зрения деление твёрдых тел на три класса с различными электрофизическими свойствами – металлы, диэлектрики и полупроводники.

В зависимости от степени заполнения валентной зоны электронами и ширины запрещённой зоны возможны четыре случая, изображённые на рис. 4.18.



**Рис. 4.18**

Объединение  $N$  атомов в кристаллическую решетку приводит к возникновению в каждой разрешенной зоне  $2N(2l + 1)$  уровней. На каждом уровне в зоне могут находиться лишь два электрона с противоположенными направ-

лениями спина, что следует из принципа Паули. Таким образом, в зоне могут располагаться не более  $2N(2l + 1)$  электронов.

В некоторых металлах валентная зона заполнена электронами частично (см. рис. 4.18 а). При температуре абсолютного нуля  $T = 0$  электроны заполняют попарно нижние уровни валентной зоны (точки на рис. 4.18). В валентной зоне имеются вакантные уровни энергии, не занятые электронами. Такая ситуация характерна для щелочных металлов. Например, единственный валентный электрон атома *Na* находится в  $3s$ -состоянии, при объединении  $N$  атомов *Na* в кристалл в  $3s$ -зоне будут находиться  $N$  электронов, хотя эта зона может вместить  $2N$  электронов, т. е.  $3s$ -зона оказывается заполненной лишь наполовину.

Металлы образуются также в том случае, когда валентная зона перекрывается с зоной проводимости, не занятой электронами (см. рис. 4.18 б), т. е. когда ширина запрещенной зоны стремится к нулю. Это имеет место для электронов второй группы таблицы Менделеева (*Be, Mg, Ca, Zn* и пр.).

Во всех металлах, таким образом, существует разрешённая энергетическая зона, частично заполненная электронами. В ней имеются свободные энергетические уровни, что создаёт возможность для изменения энергии электронов.

Уровни энергии в зоне расположены квазинепрерывно, т. е. энергетическое расстояние между ними очень мало:  $\sim 10^{-23}$  эВ. Энергия теплового движения  $kT$  ( $k$  – постоянная Больцмана) составляет при 1 К величину  $\sim 10^{-4}$  эВ. Поэтому при температурах выше абсолютного нуля часть электронов в металлах перемещается на более высокие уровни энергии.

Если в телах с частично заполненной энергетической зоной создать внешнее электрическое поле с напряжённостью  $E$ , то на электроны этой зоны будет действовать сила равная по модулю  $F = qE$ . Под действием силы  $F$  электроны будут



ускоряться в направлении противоположном полю и на пути  $x$  приобретает дополнительную энергию

$$W = Fx = qEx. \quad (4.22)$$

Этот процесс возможен, т. к. в верхней области частично заполненной зоны имеются свободные энергетические уровни, на которые переходят электроны, получающие дополнительную энергию от поля. Электроны участвуют в направленном движении под действием даже слабых электрических полей (в силу квазинепрерывности зоны), создавая электрический ток. Из сказанного следует, что твёрдые тела с частично заполненной электронами энергетической зоной являются хорошими проводниками.

Если валентная зона кристалла полностью заполнена электронами, в зоне проводимости электроны отсутствуют, а ширина запрещённой зоны достаточно велика:  $\Delta E > 3$  эВ, т. е. много больше  $kT$ , то кристалл является диэлектриком (см. рис. 4.18 в). В этом случае энергии теплового движения недостаточно, чтобы перебросить электроны из валентной зоны в зону проводимости, преодолев запрещённую зону шириной несколько электронвольт. Электрическое поле не способно вызвать упорядоченное движение электронов в валентной зоне, т.к. электроны не могут менять свою энергию под действием поля из-за отсутствия свободных уровней. Поэтому диэлектрики обладают практически нулевой электропроводностью. К типичным диэлектрикам относятся алмаз ( $\Delta E = 5,2$  эВ), нитрид бора ( $\Delta E = 4,6$  эВ), окись алюминия ( $\Delta E = 7$  эВ) и т. д.

На рис. 4.18 г проведена зонная схема полупроводника при температуре абсолютного нуля ( $T = 0$  К). Валентная зона полностью заполнена электронами, зона проводимости не содержит электронов. Следовательно, полупроводник имеет зонную схему подобную зонной схеме диэлектрика (см. рис. 4.18 в) и не проводит электрический ток при  $T = 0$  К.

Однако полупроводники в отличие от диэлектриков имеют более узкую запрещённую зону:  $\Delta E \leq 1 \text{ эВ}$ , что сравнимо с энергией теплового движения электронов. Поэтому при повышении температуры некоторые электроны валентной зоны получают дополнительную тепловую энергию большую, чем  $\Delta E$ . Такие электроны перебрасываются через запрещённую зону на нижние уровни зоны проводимости. После этого они могут увеличивать свою энергию в электрическом поле, участвуя в направленном движении и создавая электрический ток.

Таким образом, зонная теория проводимости кристаллов позволяет сформулировать следующий вывод:

*Основным критерием классификации кристаллов по электрическим свойствам является соотношение между шириной запрещённой зоны ( $\Delta E$ ) и энергией теплового движения электронов ( $kT$ ):*

- $\Delta E \ll kT$ , или  $\Delta E \rightarrow 0$  для металлических проводников;
- $\Delta E \gg kT$  – для диэлектриков;
- $\Delta E \geq kT$  – для полупроводников.

#### **4.2.3. Некоторые особенности проводимости полупроводников**

*Собственные полупроводники.*

*Электронная и дырочная проводимость*

*Собственными полупроводниками* называются химически чистые полупроводники, не содержащие примесей других элементов.

В собственном полупроводнике при температуре абсолютного нуля  $T = 0 \text{ К}$  валентная зона полностью заполнена электронами, зона проводимости не содержит электронов.

Поэтому при  $T = 0$  К собственный полупроводник ведёт себя как диэлектрик и не проводит электрический ток. Зонная схема такого полупроводника приведена на рис. 4.19 а.

Потолком валентной зоны называют верхнюю границу валентной зоны и обозначают соответствующую ей энергию –  $E_v$ .

Дном зоны проводимости называют нижнюю границу зоны проводимости и обозначают соответствующую ей энергию –  $E_c$ .

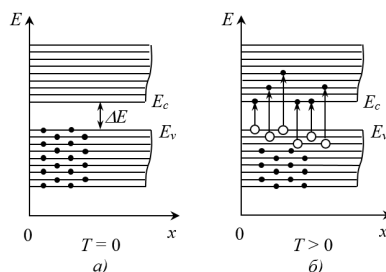


Рис. 4.19

С повышением температуры некоторые электроны с верхних уровней валентной зоны переходят на нижние уровни зоны проводимости. Энергию необходимую для преодоления запрещённой зоны они получают за счёт термического возбуждения (см. рис. 4.19 б). В результате, в зоне проводимости появляются свободные электроны, которые могут увеличивать свою энергию, благодаря наличию свободных энергетических уровней в этой зоне.

Чем уже запрещённая зона и выше температура кристалла, тем больше электронов переходит в зону проводимости и тем выше становится электропроводность полупроводника.

У потолка валентной зоны появляются вакантные энергетические уровни, не занятые электронами. Удаление отрицательно заряженного электрона и освобождение уровня эквивалентно появлению в зоне положительного заряда, равного по величине заряду электрона. Электроны валентной зоны могут переходить на эти вакантные уровни, что соответствует переходу положительного заряда на новое место. В валентной зоне принято рассматривать движение не электронов, а свободных квантовых состояний называемых дырками.

*Дырка* – это квазичастица, существующая в валентной зоне полупроводника, участвующая в электропроводности и имеющая положительный заряд, равный по модулю заряду электрона.

Таким образом, валентная зона с небольшим числом вакантных состояний по электрическим свойствам эквивалентна пустой зоне, содержащей такое же число положительно заряженных квазичастиц – дырок. Дырка не является реальной частицей, её движение заменяет собой движение всей системы электронов валентной зоны.

Очевидно, что в собственном полупроводнике концентрация электронов (т. е. их число в единице объема кристалла) в зоне проводимости равна концентрации дырок в валентной зоне

$$n_0 = p_0 \quad (4.23)$$

При наложении на такой кристалл внешнего электрического поля (см. рис. 4.20) в нём возникает направленное движение электронов зоны проводимости и дырок валентной зоны, т. е. появляется электрический ток. Полупроводник становится проводящим.

В электрическом поле электроны зоны проводимости движутся против поля, поднимаясь вверх от дна зоны  $E_c$ ,

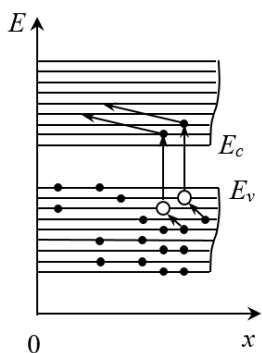


Рис. 4.20

благодаря наличию в этой зоне вакантных уровней энергии. Дырки в зоне проводимости движутся в направлении вектора напряжённости электрического поля, опускаясь вниз от потолка валентной зоны  $E_v$ .

Электронная проводимость – это проводимость полупроводника, обусловленная движением электронов в зоне проводимости.

Дырочная проводимость – это проводимость полупроводника, обусловленная движением дырок в валентной зоне.

Два типичных широко используемых в технике полупроводника *Ge* и *Si* образуют кристаллическую решетку типа алмаза. В такой решётке каждый атом связан ковалентными связями с четырьмя соседними атомами, удаленными от него на одинаковые расстояния. В образовании каждой ковалентной связи участвует пара обобщённых валентных электронов. Такое расположение атомов условно представлено в виде двумерной структуры на рис. 4.21.

Кружками обозначены атомы *Ge* или *Si*. Двойные линии обозначают ковалентные связи, каждая из линий соответствует одному обобществленному электрону.

При повышении температуры одна из связей может быть разорвана, электрон покидает своё место и перемещается по кристаллу (см. рис. 4.21). На месте отсутствующего электрона возникает дырка с положительным зарядом. Дырка также может перемещаться по кристаллу за счет перехода на её место электрона из соседней ковалентной пары.

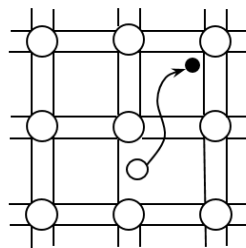


Рис. 4.21

На зонной схеме этим процессам соответствуют переход электрона в зону проводимости и возникновение дырки в валентной зоне (процесс генерации электронно-дырочных пар), перемещение их по кристаллу.

При встрече в кристалле свободный электрон и дырка рекомбинируют, и разорванная ковалентная связь восстанавливается. В собственном полупроводнике одновременно происходит генерация и рекомбинация электронно-дырочных пар. В результате действия этих процессов устанавлива-

ется некоторая равновесная концентрация электронов и дырок в полупроводнике, соответствующая данной температуре, причём  $n_0 = p_0$ . С ростом температуры процесс генерации электронно-дырочных пар усиливается, концентрация электронов и дырок возрастает, соответственно, увеличивается и электропроводность полупроводника. Таким образом, сопротивление полупроводника зависит от температуры, оно уменьшается с ростом температуры.

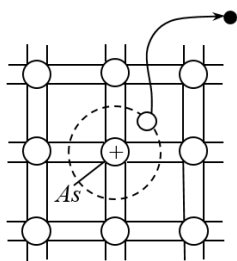
### *Донорные и акцепторные полупроводники*

Все реальные кристаллы, в том числе и полупроводники, содержат различные дефекты и примеси. В ряде случаев примеси специально вводятся в полупроводник для придания ему особых свойств.

Рассмотрим два вида примесных полупроводников: *донорные* и *акцепторные*.

*Донорная примесь* – это примесные атомы, у которых в валентной оболочке обычно на один электрон больше, чем у атомов полупроводника, который легируется.

Пусть в кристаллическую решётку четырёхвалентного *Ge* или *Si* вводится небольшое число атомов *V*-группы таблицы Менделеева, например, мышьяка – *As* (донорная примесь), которые замещают атомы основного вещества в регулярных узлах решётки. На рис. 4.22 показано, что атом



**Рис. 4.22**

пятивалентного *As* расходует четыре валентных электрона на образование ковалентных связей с четырьмя ближайшими атомами *Ge*. Пятый электрон в образовании связи не участвует. Вследствие взаимодействия с кристаллической решеткой связь его с атомами *As* ослабевает, и он движется по орбите большого радиуса. Орбита

пятого электрона на рис. 4.22 уменьшена, радиус этой орбиты, согласно расчётам – около  $6a$ , где  $a \sim 0,56$  нм – постоянная решётки *Ge*.

Энергия ионизации доноров в *Ge* и *Si* невелика: она составляет несколько сотых электронвольта. Таким образом, достаточно сообщить пятому электрону донорной примеси весьма незначительную энергию  $\Delta E_d$ , чтобы оторвать его от атома и превратить в свободный электрон.

С точки зрения зонной теории, пентавалентным примесям соответствуют локальные энергетические уровни, расположенные в запрещенной зоне примерно на 0,01–0,05 эВ ниже дна зоны проводимости. Примесные уровни заполнены электронами. При сообщении таким электронам энергии  $\Delta E_d$  они переходят в зону проводимости и могут переносить ток. При этом атомы пентавалентной примеси превращаются в положительно заряженные ионы, расположенные в узлах кристаллической решётки и не участвующие в электропроводности – локализованные дырки (см. рис. 4.23). Уровень энергии  $\Delta E_d$  называется *донорным уровнем*.

При повышении температуры в первую очередь ионизируются донорные уровни. При этом концентрация донорных

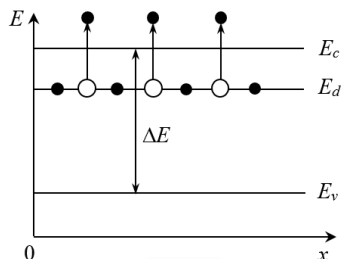


Рис. 4.23

электронов в зоне проводимости во много раз может превышать концентрацию собственных носителей тока  $N_{n0} \gg n_i$ .

*Основными носителями заряда в донорных полупроводниках являются электроны*, концентрация которых может во много раз превышать концентрацию дырок – неосновных носителей заряда. В связи с этим такие полупроводники называют *электронными*, или *полупроводниками n-типа*.

Дальнейший рост температуры приводит к возрастанию собственной проводимости, связанной с переходом электронов из валентной зоны в зону проводимости.

*Акцепторная примесь* — это примесные атомы, у которых в валентной оболочке на один электрон меньше, чем у атомов полупроводника, который легируется.

Допустим, что в решётку *Ge* или *Si* введены трёхвалентные примесные атомы 3-й группы таблицы Менделеева (акцепторная примесь), например, атомы бора *B*. Они замещают некоторые из атомов *Ge* в узлах решётки. Но трёхвалентным атомам *B* не хватает одного электрона для образования четырех ковалентных связей с ближайшими атомами *Ge*. Одна из связей оказывается неупакованной и представляет собой дырку с положительным зарядом (см. рис. 4.24). Атом *B* может захватить валентный электрон одного из соседних атомов *Ge*, при этом дырка переместится в кристалле, становясь свободной.

Расчёты показывают, что для ионизации акцепторной примеси требуется небольшая энергия  $\Delta E_a \sim 0,01$  эВ.

На рис. 4.25 приведена зонная схема *Ge* с акцепторной примесью. На небольшом расстоянии  $\Delta E_a \sim 0,01$  эВ от потока валентной зоны располагаются локальные незаполненные акцепторные уровни энергии. Уровень энергии  $\Delta E_a$  называется *акцепторным уровнем*.

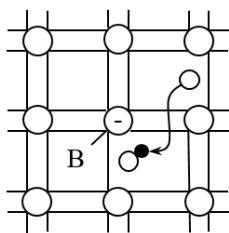


Рис. 4.24

При относительно невысоких температурах электроны из валентной зоны переходят на примесные уровни, превращая атомы бора в отрицательные ионы. Эти захваченные электроны не способны перемещаться по кристаллу и в электропроводности не участвуют.



Основными носителями заряда в акцепторном полупроводнике являются дырки, образующиеся в валентной зоне. Концентрация дырок может быть значительно выше, чем концентрация собственных носителей тока (т. к.  $E_a \ll \Delta E$ ):  $p_{p0} \gg n_i$ . Такие полупроводники принято называть дырочными или полупроводниками *p-типа*. При повышении температуры на проводимость, обусловленную атомами примеси, накладывается собственная проводимость основного полупроводника.

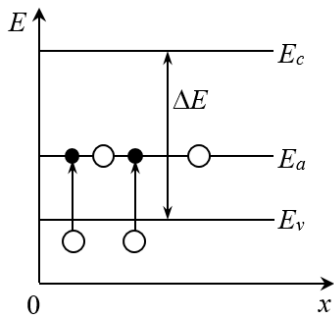


Рис. 4.25

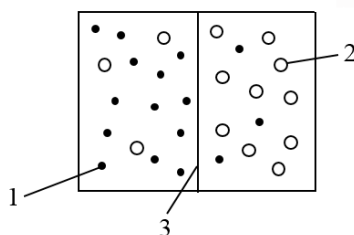
### Электронно-дырочный (*p-n-переход*)

Контакт двух полупроводников с различным типом проводимости называется электронно-дырочным переходом, или *p-n-переходом*. Прогресс полупроводниковой электроники связан в основном с использованием *p-n-переходов*, т. к. *p-n-переходы* различной структуры весьма широко применяются для создания активных и пассивных элементов электронных схем.

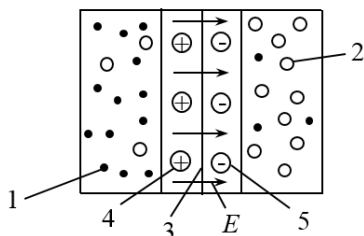
Электронно-дырочные переходы изготавливаются в виде *внутренней* границы в монокристаллическом полупроводнике. Для этого используются различные методы: сплавления, диффузии, эпитаксиального выращивания и др.

В момент соприкосновения *p-* и *n-*областей на границе раздела существует большой градиент концентрации электронов и дырок (см. рис. 4.26 а). Поэтому начинается диффузия электронов из *n-*области в *p-*область и дырок из *p-*области в *n-*область. Возникновение диффузионных потоков приведет к обеднению основными носителями заряда при-

граничных слоёв. В результате этого в  $n$ -области, примыкающей к переходу, создается положительный объемный заряд из неподвижных ионов донорной примеси. В  $p$ -области вблизи перехода возникает отрицательный объемный заряд



**Рис. 4.26 а.** Основные и неосновные носители заряда  $p$ - и  $n$ -областях: 1 – электроны; 2 – дырки; 3 – границы раздела



**Рис. 4.26 б.** Образование объемных зарядов и создание  $p$ - $n$ -перехода: 1 – электроны; 2 – дырки; 3 – границы раздела; 4 – ионы доноров; 5 – ионы акцепторов

из неподвижных ионов акцепторной примеси (см. рис. 4.26 б).

Таким образом, вблизи границы раздела  $p$ - и  $n$ -областей полупроводника возникает область, состоящая из двух слоёв противоположных по знаку объёмных зарядов, которые и представляют собой  $p$ - $n$ -переход. Область образовавшегося  $p$ - $n$ -перехода обладает высоким электрическим сопротивлением, т. к. в ней практически отсутствуют свободные заряды. Внутри  $p$ - $n$ -перехода действует электрическое поле  $E$ , созданное объёмными зарядами. Благодаря возникшему электрическому полю, процесс диффузии основных носителей замедляется и устанавливается равновесное состояние  $p$ - $n$ -перехода.

В  $p$ - и  $n$ -областях полупроводника, как показано на рис. 4.26 а, б, в, г, д существуют основные и неосновные носители тока. В равновесном состоянии через  $p$ - $n$  переход протекают два тока – диффузионный и дрейфовый (см. рис. 4.26 в).

*Диффузионный ток* – это ток, возникающий в результате диффузионного переноса основных носителей через  $p$ – $n$ -переход. Он образован потоком дырок из  $p$ - в  $n$ -область и встречным потоком электронов из  $n$ - в  $p$ -область.

Неосновные носители (электроны в  $p$ -области и дырки в  $n$ -области) в силу хаотического теплового движения могут оказаться в электрическом поле  $p$ – $n$ -перехода и под действием поля перенестись через переход – электроны – в  $n$ -область, дырки – в  $p$ -область, образуя дрейфовый ток.

*Дрейфовый ток* – это ток, возникающий в результате переноса неосновных носителей под действием электрического поля перехода через  $p$ – $n$ -переход.

Эти токи направлены навстречу друг другу и равны по величине, результирующий ток через изолированный  $p$ – $n$ -переход в равновесном состоянии равен нулю.

Приложим к переходу внешнее напряжение плюсом к  $p$ -области, а минусом к  $n$ -области, так называемое *прямое смещение* (см. рис. 4.26 в). Поле, создаваемое



Рис. 4.26 в. Диффузный и дрейфовый токи через  $p$ – $n$ -переход

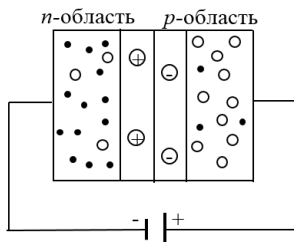


Рис. 4.26 г.  $p$ – $n$ -переход под действием внешнего прямого тока

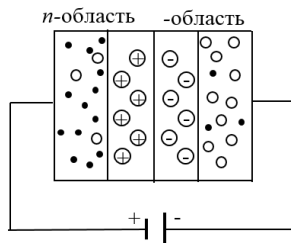


Рис. 4.26 д.  $p$ – $n$ -переход под действием внешнего обратного тока

мое внешним источником, ослабит действие внутреннего поля  $p$ – $n$ -перехода, его толщина уменьшится, уменьшится и сопротивление перехода. Дрейфовый ток практически исчезнет, и через переход будет протекать значительный диффузионный ток. С увеличением прямого напряжения этот ток резко возрастает.

Приложим теперь к переходу внешнее напряжение плюсом к  $n$ -области, минусом к  $p$ -области, так называемое *обратное смещение* (см. рис. 4.26 д). Поле, создаваемое внешним источником, усилит действие внутреннего поля перехода, его толщина возрастёт и сопротивление увеличится. Диффузионный ток уменьшится практически до нуля, т. к. основные носители не смогут преодолевать сильное поле перехода. Фактически через переход будет протекать только дрейфовый ток, который называют обратным. По своей природе он является тепловым, связанным с тепловой генерацией носителей вблизи  $p$ – $n$ -перехода.

Вольт-амперная характеристика  $p$ – $n$ -перехода для прямой и обратной полярности приведена на рис. 4.27. С увеличением прямого напряжения ток через переход резко возрастает.

Обратные токи малы, они составляют примерно  $10^{-6}$ – $10^{-8}$  А. При очень больших обратных напряжениях происходит

рост тока, что обусловлено электрическим пробоем  $p$ – $n$ -перехода.

Таким образом,  $p$ – $n$ -переход имеет практически одностороннюю проводимость: он хорошо проводит ток при прямой полярности и почти не проводит ток при обратной полярности приложенного напряже-

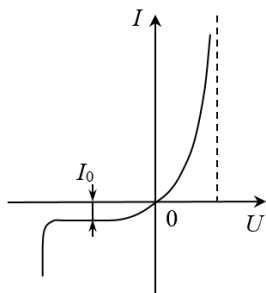


Рис. 4.27

ния. Именно это свойство и обуславливает его широкое применение в полупроводниковой электронике для создания диодов, транзисторов и различных элементов полупроводниковых микросхем.

#### ***4.2.4. Понятийный аппарат раздела о поведении систем взаимодействующих частиц в квантовой механике***

*Принцип Паули* утверждает, что в системе частиц с целым спином не может существовать двух частиц с одинаковым набором четырёх квантовых чисел:  $n$ ;  $l$ ;  $m$ ;  $m_s$ . Иными словами, в одном квантовом состоянии, характеризуемым тремя квантовыми числами –  $n$ ,  $l$ ,  $m$  – может находиться не более двух электронов с антипараллельными спинами ( $m_s = \pm 1/2$ ).

*Линейчатый энергетический спектр электронов в изолированных атомах вещества* – дискретный набор «разрешённых» значений энергии электронов, вытекающий непосредственно из решения основного уравнения квантовой механики (Уравнения Шредингера) и отражающий одну из основных особенностей поведения микрочастиц – квантование энергии. Для всех атомов одного и того же химического элемента энергетический спектр электронов строго одинаков.

*Зонный энергетический спектр электронов в кристаллах.* При объединении атомов в кристалл силы взаимодействия между атомами приводят к изменению энергетических состояний электронов, в результате чего каждый энергетический уровень расщепляется на ряд подуровней, образующих зону, т. е. интервал «разрешённых» энергий. На каждом подуровне внутри зоны, в соответствии с принципом Паули, может находиться не более двух электронов с противоположной ориентацией спинов.

*Валентная зона* – область допустимых значений энергий электронов в кристалле, возникшая из того уровня энергии изолированного атома, на котором находятся валентные электроны. Она полностью заполнена валентными электронами для диэлектриков и полупроводников при температуре абсолютного нуля.

*Зона проводимости* – область допустимых значений энергии электронов в кристалле, возникшая из уровня энергии изолированного атома, расположенного выше валентного уровня и не занятого электронами. В зоне проводимости диэлектриков и полупроводников при температуре абсолютного нуля отсутствуют электроны.

*Запрещённая зона* – область энергий, которые не могут иметь электроны в идеальном кристалле. Запрещённая зона разделяет валентную зону и зону проводимости.

*Зонная теория проводимости кристаллов* – теория, в которой классификация веществ по электрическим свойствам на проводники, полупроводники, диэлектрики определяется характером заполнения электронами валентной зоны и шириной запрещённой зоны в сравнении с энергией теплового движения.

*Проводник (металл)* – вещество, в котором ширина запрещённой зоны равна нулю (валентная и свободная зоны перекрываются) либо валентная зона заполнена не полностью. При помещении во внешнее электрическое поле валентные электроны металла имеют возможность участвовать в проводимости даже в слабых полях и при низкой температуре.

*Диэлектрик* – вещество, для которого ширина запрещённой зоны много больше энергии теплового движения, а валентная зона заполнена полностью, вследствие чего эти вещества практически не проводят электрический ток.

Проводимость может возникнуть только в сверхсильных полях или при очень высокой температуре – пробой диэлектрика.

*Полупроводник* – вещество, которое может вести себя как диэлектрик или как проводник в зависимости от условий. С точки зрения зонной теории, полупроводники от диэлектриков отличаются сравнительно малой шириной запрещённой зоны. Это приводит к тому, что при нагревании или облучении вещества электроны могут переходить из валентной зоны, в свободную, что позволяет им участвовать в проводимости при наличии внешнего электрического поля. Характерной особенностью полупроводников является то, что их электропроводность возрастает при увеличении температуры (в отличие от металлов, для которых электропроводность падает с ростом температуры). Типичные полупроводники – это германий и кремний.

*Дырки* – не занятые электронами энергетические состояния в валентной зоне полупроводника. Дырки рассматриваются как квазичастицы с положительным зарядом и некоторой эффективной массой, участвующие в электропроводности полупроводника.

*Собственный полупроводник* – химически чистый полупроводник, не содержащий примесей других элементов. Концентрация электронов в нём равна концентрации дырок  $n_0 = p_0 = n_i$ .

*Электронная проводимость* – это проводимость полупроводника, обусловленная движением электронов в зоне проводимости.

*Дырочная проводимость* – это проводимость полупроводника, обусловленная движением дырок в валентной зоне.

*Донор* – примесный атом в полупроводнике, ионизация которого приводит к появлению свободного электрона в зоне

проводимости. Валентность донора обычно на единицу выше валентности атомов основного вещества.

*Акцептор* – примесный атом в полупроводнике, который может захватить электрон из валентной зоны, что эквивалентно появлению в ней дырки. Валентность акцептора обычно на единицу ниже валентности атомов основного вещества.

*Полупроводник  $n$ -типа (электронный)* – это полупроводник, легированный донорами, концентрация электронов в нём может значительно превышать концентрацию дырок. Он обладает преимущественной электронной проводимостью.

*Полупроводник  $p$ -типа (дырочный)* – это полупроводник, легированный акцепторами, концентрация дырок в нём может значительно превышать концентрацию электронов. Он обладает преимущественной дырочной проводимостью.

*Диффузия носителей заряда* – перемещение носителей заряда в твёрдых телах, обусловленное градиентом их концентрации.

*Дрейф носителей заряда* – упорядоченные движения носителей заряда в твёрдых телах под действием электрических полей.

*Электронно-дырочный переход ( $p$ – $n$ -переход)* – область полупроводника, в которой имеет место пространственное изменение типа проводимости от электронной ( $n$ ) к дырочной ( $p$ ). Электронно-дырочный переход обладает односторонней проводимостью, т. е. выпрямляющими свойствами и используется при создании многих полупроводниковых приборов.



### 4.3. Примеры решения задач к разделу «Элементы квантовой механики»

**Пример 1.** Частица находится в прямоугольной потенциальной яме. Оценить разность энергий двух соседних разрешённых уровней:

а) для частицы массой  $m_1 = 10^{-30}$  кг при ширине ямы  $l_1 = 10^{-10}$  м;

б) для частицы массой  $m_2 = 10^{-27}$  кг при ширине ямы  $l_2 = 10^{-1}$  м;

**Решение.** Решение задачи о движении микрочастицы, обладающей волновыми свойствами, производится на основе уравнения Шредингера. Для случая одномерной бесконечно глубокой потенциальной ямы оно подробно рассмотрено в гл. 4.2. Один из главных выводов, полученных при решении этой задачи, состоит в том, что энергия микрочастицы, квантуется, т. е. принимает дискретный набор значений. Условие квантования энергии выражается уравнением (4.9):  $E = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ml^2}$  где  $n$  – номер «разрешённого» энергетического уровня или квантовое число, принимающее только целочисленные значения  $n = 1, 2, 3$  и т. д. Найдём разность энергий для двух соседних уровней с номерами  $n$  и  $n + 1$ :

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} (2n+1)$$

или приближенно

$$\Delta E \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{ml^2} \cdot n. \quad (I)$$

Произведём вычисления для первой ситуации (по параметрам, заданным в условии, эта ситуация соответствует электрону, находящемуся в атоме):

$$\Delta E_1 = \frac{1,05^2 \cdot (10^{-34})^2 \cdot 3,14^2}{10^{-30} \cdot (10^{-10})^2} \cdot n \approx 108,7 \cdot 10^{-19} \cdot n \text{ (Дж)} \approx 68 \cdot n \text{ (эВ)}$$

– дискретность энергетических уровней выражена явно.

Произведём вычисления для второй ситуации (по параметрам, заданным в условии, эта ситуация соответствует молекулам газа, находящимся в сосуде макроскопических размеров):

$$\Delta E_2 = \frac{1,05^2 \cdot (10^{-34})^2 \cdot 3,14^2}{10^{-27} \cdot (10^{-1})^2} \cdot n \approx 108,7 \cdot 10^{-39} \cdot n \text{ (Дж)} \approx 68 \cdot 10^{-20} \cdot n \text{ (эВ)}$$

– чувствительность имеющихся приборов не позволяет фиксировать столь малые изменения энергии, поэтому энергетический спектр частицы будет восприниматься как сплошной. Таким образом, даже для микрочастиц (молекул), движущихся в достаточно больших объёмах, эффект квантования энергии можно не учитывать.

**Ответ:**  $\Delta E_2 = 68 \cdot n \text{ эВ}$ ;  $\Delta E_2 = 68 \cdot 10^{-20} \cdot n \text{ эВ}$ .

**Пример 2.** Частица находится в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$ , имея энергию в четыре раза больше минимально возможной. Сколько длин волн де Бройля укладывается на ширине ямы?

**Решение.** В квантовой механике термин «потенциальная яма» используется для обозначения ситуации, когда движение частицы определенным образом ограничено действием внешних сил, «прямоугольная бесконечно глубокая потенциальная яма» означает, что частица может свободно двигаться внутри отрезка  $l$ , но не может выйти за пределы этого отрезка. Общее решение задачи о движении частицы в этих условиях приведено в гл. 4.2, воспользуемся полученными там результатами для анализа описанной ситуации.

Запишем условие квантования энергии частицы массой  $m$  в яме шириной  $l$ :

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} \cdot n^2, \quad (1)$$

где  $n \neq 0$  и  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Замечая, что минимальная энергия частицы (при  $n = 1$ )  $E_{\min} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2}$  условие квантования представим в виде

$$E_n = n^2 E_{\min}, \quad (2)$$

откуда следует, что, если по условию задачи  $E_n = 4E_{\min}$ , то  $n = 2$  – частица находится на втором энергетическом уровне.

Используя связь между волновыми и корпускулярными характеристиками микрочастиц  $\lambda_{\text{де Бр}} = \frac{h}{p}$ , а также связь между энергией и импульсом частицы  $p = \sqrt{2mE}$  формулу для определения длины волны де Бройля запишем в виде

$$\lambda_{\text{де Бр}} = \frac{h}{\sqrt{2mE_n}}, \text{ или с учётом выражения (1) и } h = 2\pi\hbar:$$

$$\lambda_{\text{де Бр}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ml^2}}} = \frac{2l}{n}, \text{ откуда}$$

$$l = n \cdot \frac{\lambda_{\text{де Бр}}}{2}. \quad (3)$$

Таким образом, мы получили важный общий вывод: *на ширине потенциальной ямы всегда укладывается целое число длин полуволин де Бройля, равное порядковому номеру энергетического уровня, на котором находится микрочастица.* Этот вывод использован при построении рис. 4.3.

Произведем расчёт с учётом условия задачи. Поскольку частица, имеющая энергию в четыре раза больше минимальной, находится на втором энергетическом уровне, из уравнения (3) получаем  $\frac{l}{\lambda_{\text{де Бр}}} = \frac{n}{2} = \frac{2}{2} = 1$  – на ширине ямы укладывается одна длина волны де Бройля

$$\text{Ответ: } \frac{l}{\lambda_{\text{де Бр}}} = 1.$$

**Пример 3.** Пси-функция частицы, находящейся в прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$ , имеет вид, приведенный на рисунке 4.28 а. Определить вероятность обнаружения частицы в двух случаях: а) в интервале шириной  $\Delta l_1 = 0,01 l$  вблизи точки с координатой  $x_1 = 0,5 l$ ; б) в интервале  $0,25 l \leq x \leq 0,5 l$ .

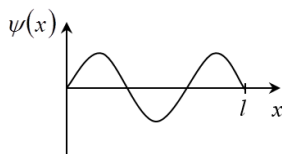


Рис. 4.28 а

**Решение.** Условие задачи, связанное с термином «прямоугольная бесконечно глубокая потенциальная яма», означает, что частица может свободно двигаться внутри отрезка  $l$ , но не может выйти за пределы этого отрезка. Решение уравнения Шредингера позволяет найти вид пси-функции для частицы, находящейся в указанных условиях (см. формулу (4.8)):

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (1)$$

где  $l$  – ширина потенциальной ямы;  $n$  – квантовое число, принимающее дискретный набор значений ( $n = 1, 2, 3, \dots$  и  $n \neq 0$ ).

Судя по рис. 4.28 а, на ширине ямы укладывается три полуволны де Бройля. С учётом вывода, полученного при решении предыдущей задачи, это означает, что частица находится в квантовом состоянии, для которого  $n = 3$ , поэтому формулу (1) можно записать в виде

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{3\pi}{l} x. \quad (2)$$

Физический смысл пси-функции состоит в том, что квадрат её модуля численно равен плотности вероятности обнаружения частицы в окрестности заданной точки (см. формулу (3.22)):  $|\psi|^2 = \frac{dW}{dV}$  откуда следует, что вероятность обнаружения частицы в бесконечно малом объёме  $dV$  равна

$dW = |\Psi|^2 dV$ , а для одномерной задачи  $dW = |\Psi|^2 dx$ . Тогда для интервала конечной ширины вероятность обнаружения частицы найдётся интегрированием:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi|^2 dx. \quad (3)$$

Изобразим графически вид подынтегральной функции  $\psi^2(x)$  (здесь и в дальнейшем знак модуля опущен, т. к. в данной задаче пси-функция не является комплексной). Для ситуации а) из рис. 4.28 б следует, что в пределах малого отрезка  $\Delta l_1$  вблизи точки с координатой  $x_1 = 0,5 l$ , значение функции  $\psi^2$  можно считать постоянным, тогда приближенное значение интеграла (3) с учётом формулы (2) определяется выражением

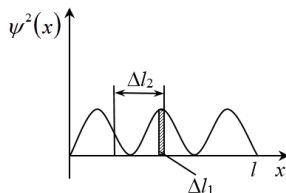


Рис. 4.28 б

$$W \approx \psi^2(x_1) \cdot \Delta l_1 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{3\pi x_1}{l}\right) \cdot \Delta l_1, \quad (4)$$

которое в графической интерпретации соответствует заштрихованной площади. В точке с координатой  $x_1 = 0,5 l$  функция  $\sin^2\left(\frac{3\pi x_1}{l}\right)$  принимает максимальное значение равное 1, тогда

$$W = \frac{2\Delta l_1}{l}. \quad (5)$$

Произведём вычисления:

из формулы (5): при  $\Delta l_1 = 0,01l$  вероятность  $W_1 = 2/l \times 0,01l = 0,02 = 2 (\%)$ .

Для ситуации б): интеграл (3) с учётом формулы (2) принимает вид

$$W = \frac{2}{l} \int_{0,25l}^{0,5l} \sin^2\left(\frac{3\pi x}{l}\right) dx. \quad (6)$$

Используя тригонометрическую формулу  $\sin^2 x = 0,5(1 - \cos 2x)$ , запишем выражение (6):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{l} \int_{0,25l}^{0,5l} \left(1 - \cos \frac{6\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{l} \left[ \int_{0,25l}^{0,5l} dx - \int_{0,25l}^{0,5l} \cos \frac{6\pi x}{l} dx \right] = \\ &= \frac{1}{l} \left[ x - \frac{l}{6\pi} \sin \frac{6\pi x}{l} \right]_{0,25l}^{0,5l} = \frac{1}{l} \left[ (0,5l - 0,25l) - \frac{l}{6\pi} (\sin 3\pi - \sin 1,5\pi) \right] = \\ &= 0,25 - \frac{1}{6\pi} (0 + 1) \approx 0,25 - 0,05 = 0,20 = 20\%. \end{aligned}$$

**Пример 4.** Определить диапазоны длин волн, возникающих при переходе электрона в атоме водорода из возбуждённых состояний

а) в состояние с главным квантовым числом  $n = 1$  (серия Лаймана);

б) в состояние с главным квантовым числом  $n = 2$  (серия Бальмера);

в) в состояние с главным квантовым числом  $n = 3$  (серия Пашена) (см. рис. 4.29).

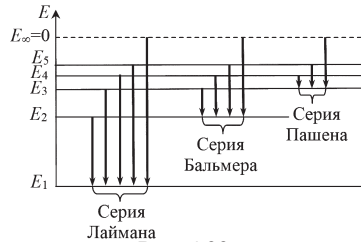


Рис. 4.29

**Решение.** В задаче рассматривается явление излучения электромагнитной

энергии атомами вещества. Согласно квантовой теории, излучение возникает при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое (см. гл. 4.1.4). Расчёт спектра излучения атомов водорода можно выполнить на основе условия квантования энергии:

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (1)$$

и второго постулата Бора:

$$h\nu = E_n - E_m, \quad (2)$$

где  $h\nu$  – энергия фотона;  $E_n$  – энергия конечного стационарного состояния электрона в атоме;  $E_m$  – энергия начального стационарного состояния. В процессе поглощения фотона энергия атома увеличивается,  $(E_n - E_m) > 0$ , а при излучении фотона атом теряет энергию,  $(E_n - E_m) < 0$ . Поэтому при рассмотрении процесса излучения уравнение (2) следует писать так:

$$h\nu = -(E_n - E_m), \quad (3)$$

Последнее уравнение с учётом взаимосвязи частоты и длины волны запишется откуда  $\frac{hc}{\lambda} = -(E_n - E_m)$

$$\lambda = -\frac{hc}{E_n - E_m}. \quad (4)$$

Вычислим «разрешённые» значения энергии электрона в атоме по формуле (1):

$$\begin{aligned} \text{При } n = 1: E_1 &= -\frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{8 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^2} = -21,76 \cdot 10^{-19} (\text{Дж}) = \\ &= -\frac{21,76 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = -13,6 (\text{эВ}). \end{aligned}$$

$$\text{При } n = 2: E_2 = \frac{E_1}{4} = -5,44 \cdot 10^{-19} (\text{Дж}) = -3,4 (\text{эВ}).$$

$$\text{При } n = 3: E_3 = \frac{E_1}{9} = -2,42 \cdot 10^{-19} (\text{Дж}) = -1,5 (\text{эВ}).$$

$$\text{При } n = 4: E_4 = \frac{E_1}{16} = -1,36 \cdot 10^{-19} (\text{Дж}) = -0,85 (\text{эВ}).$$

Как сказано в условии, серия Лаймана – это группа линий в спектре излучения атомов водорода, возникающая при переходе электронов из возбуждённых состояний в невозбуждённое (см. рис. 4.29). Из уравнения (4) видно, что максимальная длина волны в этой серии возникнет при наименьшем значении разности энергий, т. е. при переходе из

состояния с главным квантовым числом равным 2 ( $E_2 = -3,4$  эВ) в состояние с главным квантовым числом равным 1 ( $E_1 = -13,6$  эВ), а минимальная длина волны соответствует переходу в невозбуждённое состояние из состояния с главным квантовым числом равным  $\infty$ , где  $E_m = E_\infty = 0$ .

Произведём вычисления диапазона длин волн в серии Лаймана по формуле (4)

$$\lambda_{\max} = -\frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{(-13,6 - (-3,4)) \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = \frac{12,4 \cdot 10^{-7}}{13,6 - 3,4} = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ (м)};$$

$$\lambda_{\min} = \frac{12,4 \cdot 10^{-7}}{13,6 - 0} = 0,91 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

Полученные значения длин волн лежат в ультрафиолетовой области спектра.

Аналогичные расчёты для серии Бальмера:

$$\lambda_{\max} = \frac{12,4 \cdot 10^{-7}}{3,4 - 1,5} = 6,53 \cdot 10^{-7} \text{ (м)};$$

$$\lambda_{\min} = \frac{12,4 \cdot 10^{-7}}{3,4 - 0} = 3,65 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

Полученные значения длин волн частично лежат в ультрафиолетовой области спектра, а частично – в видимой области (в частности,  $\lambda_{\max} = 6,53 \cdot 10^{-7}$  м соответствует красному свету).

Аналогичные расчёты для серии Пашена:

$$\lambda_{\max} = \frac{12,4 \cdot 10^{-7}}{1,5 - 0,85} = 19,08 \cdot 10^{-7} \text{ (м)};$$

$$\lambda_{\min} = \frac{12,4 \cdot 10^{-7}}{1,5 - 0} = 8,27 \cdot 10^{-7} \text{ (м)}.$$

Полученные значения длин волн лежат в инфракрасной области спектра.

**Ответ:** Серия Лаймана –  $(0,91 - 1,22) \cdot 10^{-7}$  м;  
серия Бальмера –  $(3,65 - 6,53) \cdot 10^{-7}$  м;  
серия Пашена –  $(8,27 - 19,08) \cdot 10^{-7}$  м.



**Пример 5.** Электрон в атоме водорода находится в состоянии с главным квантовым числом  $n = 2$  и орбитальным квантовым числом  $l = 0$ . Определить кинетическую, потенциальную и полную энергию электрона.

**Решение.** В квантовой механике состояние электрона в атоме задается набором квантовых чисел, каждое из которых несёт двойную информацию, а именно: определяет условие квантования одной из характеристик движения электрона, а также даёт представление о размерах, форме «электронного облака» и его ориентации в пространстве (см. гл. 4.1.3). Так, например, из квантовой теории строения атома водорода следует, что при  $l = 0$  «электронное облако» сферически симметрично, а его размер (точнее – наиболее вероятное расстояние электрона от ядра) определяется по формуле

$$r_{\text{н.в.}} = -\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mze^2} \cdot n^2. \quad (1)$$

Главное квантовое число определяет условие квантования полной энергии электрона

$$E = -\frac{mz^2e^4}{8\epsilon_0^2h^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (2)$$

где  $z$  – порядковый номер элемента в таблице Менделеева;  $m$  – масса электрона;  $e$  – заряд электрона;  $h = h/2\pi$  – постоянная Планка;  $n$  – главное квантовое число.

Полная энергия складывается из кинетической и потенциальной:

$$E = T + U. \quad (3)$$

Из электродинамики известно, что потенциальная энергия взаимодействия двух заряженных частиц (в нашем случае электрона и ядра атома) рассчитывается по формуле

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ze^2}{r}. \quad (4)$$

Подставляя выражение (1) в формулу (4), получим

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ze^2 \cdot mze^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 n^2}, \text{ или } U = -\frac{mz^2e^4}{4\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (5)$$

Тогда кинетическая энергия найдётся как разность полной и потенциальной:

$$T = E - U = -\frac{mz^2e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} + \frac{mz^2e^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2};$$

$$T = \frac{mz^2e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (6)$$

Сравнивая выражения (2), (5) и (6), приходим к следующим выводам:

– кинетическая энергия движения электрона в атоме по абсолютной величине совпадает с полной энергией и является положительной:  $T = |E|$ ;

– потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром атома по абсолютной величине в два раза больше, чем кинетическая и является отрицательной:  $U = -2T$ .

Произведём вычисления:

из формулы (2): при  $z = 1$  (для водорода) и  $n = 2$  (по условию):

$$E = -\frac{9,1 \cdot 10^{-31} (1,6 \cdot 10^{-19})^4}{8 \cdot (8,85 \cdot 10^{-12})^2 \cdot (6,63 \cdot 10^{-34})^2} \cdot \frac{1}{4} = -5,44 \cdot 10^{-19} \text{ (Дж)} =$$

$$= -\frac{5,44 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = -3,4 \text{ (эВ)}.$$

$$T = |E| = +3,4 \text{ (эВ)}.$$

$$U = -2T = -6,8 \text{ (эВ)}.$$

**Ответ:**  $T = +3,4 \text{ эВ}$ ;  $U = -6,8 \text{ эВ}$ ;  $E = -3,4 \text{ эВ}$ .

### Контрольные вопросы

1. Что изучает квантовая механика? Каковы главные отличительные особенности поведения частиц в микромире от поведения частиц, наблюдаемых в макромире?

2. Запишите основной закон квантовой механики (уравнение Шредингера) для одномерной стационарной задачи. Поясните все буквенные обозначения. Что в этом уравнении должно быть обязательно задано по условию задачи? Приведите простейшие примеры условий задач, решаемых в квантовой механике, и запись уравнения Шредингера для этих задач (используйте табл. 4.2).

3. Уравнение Шредингера позволяет находить пси-функцию для частицы, если известна потенциальная энергия её взаимодействия с другими частицами или полями. Какую информацию о частице можно получить, определив вид пси-функции? Запишите соответствующее уравнение.

4. Простейшая задача квантовой механики – это задача о частице в одномерной бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме. С чем связано столь экзотическое название задачи? Дайте соответствующую графическую иллюстрацию.

5.  $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot \left( E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ze^2}{r} \right) \psi = 0$ . Что это за уравнение? Для какой задачной ситуации оно написано? Какую информацию о величине  $E$  можно получить, решив это уравнение? Запишите соответствующую формулу.

6. Используя табл. 4.2, сформулируйте, в чём состоит сходство и различие энергетических спектров частиц, находящихся в разных условиях:

- частица в прямоугольной потенциальной яме;
- частица в параболической потенциальной яме (линейный гармонический осциллятор);
- частица в гиперболической потенциальной яме (электрон в атоме).

7. В задаче о движении электрона в атоме водорода решение уравнения Шредингера приводит к выводу, что основные характеристики движения электрона квантуются.

Как вы понимаете утверждение: «характеристики движения электрона в атоме квантуются»? Назовите, какие именно характеристики квантуются, и запишите соответствующие условия квантования хотя бы для двух из них.

**8.** Состояние электрона в атоме однозначно задается набором четырёх квантовых чисел. Перечислите названия квантовых чисел и укажите, какие значения может принимать каждое из них. Может ли существовать состояние с  $n = 2, l = 1, m = 2$ ? Вычислите характеристики электрона в состоянии  $n = 3, l = 2, m = -2$ . Что в полученных ответах означает знак «минус»?

Чем с точки зрения пространственной структуры отличаются друг от друга квантовые состояния электрона в атоме в следующих ситуациях: а) в первом состоянии  $n = 2, l = 0$ , а во втором состоянии  $n = 1, l = 0$ ; б) в первом состоянии  $n = 2, l = 0$ , а во втором состоянии  $n = 2, l = 1$ ?

**9.** Согласно квантовой механике излучение электромагнитной энергии атомами вещества происходит при переходе электрона из одного стационарного состояния в другое. Однако законы сохранения накладывают ограничения на такие переходы, так что некоторые из них оказываются «запрещенными» (см., например, правило отбора (4.21)).

Среди перечисленных переходов, сопровождающихся излучением энергии, укажите «запрещённые»: а)  $3s \rightarrow 1s$ ; б)  $3p \rightarrow 1s$ ; в)  $3d \rightarrow 2s$ ; г)  $3d \rightarrow 2p$ ; д)  $2p \rightarrow 2s$ .

*Примечание:* В приведённых обозначениях квантовых состояний цифра соответствует значению главного квантового числа, а буква указывает на значение орбитального квантового числа (см. информацию об орбитальном квантовом числе в гл. 4.1.3).

**10.** Сформулируйте словами и запишите в виде формулы второй постулат Бора, описывающий процесс излучения электромагнитной энергии атомами вещества. Почему спектр излучения вещества, находящегося в атомарном состоянии является линейчатым?

11. В примере решения задач 4 (см. гл. 4.3) определено, что в спектре излучения атомов водорода (в серии Бальмера) присутствует длина волны  $\lambda = 6,53 \cdot 10^7 \text{ м}$ , соответствующая красному свету. При наблюдении спектра водорода в области видимого света обнаруживаются помимо красной линии ещё сине-зелёная и фиолетовая линии. Определите, между какими энергетическими уровнями совершается переход при излучении этих линий спектра.

12. Описание движения систем взаимодействующих частиц в квантовой механике основывается на принципе Паули. Сформулируйте принцип Паули.

13. Принцип Паули можно применить, в частности, к многоэлектронным атомам. Рассмотрим, например, атом лития ( $z = 3$ ), в котором содержится три электрона. Используя принцип Паули, закончите заполнение табл. 4.6 возможных квантовых состояний электронов в атоме лития (при сферически симметричном распределении электронов относительно ядра): Какое максимальное количество электронов может находиться в атоме в состояниях с главным квантовым числом  $n = 1$ ?

Таблица 4.6

Возможные квантовые состояния электронов в атоме лития

Квантовые числа	$n$	$l$	$m$	$m_s$
1-й электрон	1	0		
2-й электрон	1	0		
3-й электрон		0		

Учитывая условие пространственного квантования (4.14)  $r_{н.в.} = -\frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mze^2} \cdot n^2$ , изобразите схематически пространственное распределение электронов относительно ядра в атоме лития.

**14.** Известно, что все атомы одного и того же химического элемента имеют одинаковый энергетический спектр (дискретный набор «разрешённых» значений энергии или энергетических уровней). При объединении атомов в кристалл, между ними возникает взаимодействие, приводящее к изменению энергетических состояний. Чем отличается энергетический спектр электронов в кристалле от энергетического спектра электронов в изолированном атоме? Что означает термин «энергетическая зона»? Каковы особенности заполнения подуровней электронами внутри зоны, вытекающие из принципа Паули?

**15.** Химические, электрические и оптические явления обусловлены, в основном, поведением внешних валентных электронов в атомах вещества. Какие энергетические зоны принято выделять для валентных электронов? Дайте определение каждой из этих зон.

**16.** Все вещества по электрическим свойствам делятся на три группы: проводники, полупроводники и диэлектрики. Каково различие между этими группами веществ с точки зрения внешних наблюдаемых явлений, возникающих при помещении их в электрическое поле? Каков критерий классификации веществ по электрическим свойствам с точки зрения зонной теории проводимости? Каковы особенности зонного спектра металлов? В чём сходство и различие зонного спектра в кристаллах диэлектриков и полупроводников?

**17.** Вещество может проводить электрический ток только в том случае, когда электроны валентной зоны имеют возможность переходить на свободные уровни зоны проводимости либо внутри самой валентной зоны. Почему в диэлектриках невозможен ни тот, ни другой процесс?

**18.** Известно, что в полупроводниках существует электронно-дырочная проводимость. Как возникает электронная проводимость? Поясните смысл термина «дырка». Как возникает дырочная проводимость? Почему проводимость полупроводников увеличивается при повышении температуры вещества?

**19.** Характер проводимости полупроводников существенно зависит от того является ли полупроводник химически чистым или имеет примеси. Чем отличается собственная и примесная проводимость полупроводников?

**20.** Чтобы характер проводимости полупроводника изменился, необходимо, чтобы валентность атомов примеси отличалась от валентности основного полупроводника. Что такое донорная примесь? Каковы особенности проводимости полупроводников *n*-типа? Что такое акцепторная примесь? Каковы особенности проводимости полупроводников *p*-типа?

**21.** Что такое *p–n*-переход? Каково основное свойство такой системы?

#### *Рекомендуемая литература*

1. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 3: Оптика. Атомная физика. Физика ядра и элементарных частиц: учеб. пособие / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург: Лань, 2005. – 320 с.

2. Трофимова Т. И. Курс физики: учеб. пособие. – Москва: Высшая школа, 2007. – 560 с.

## Глава 5. АТОМНОЕ ЯДРО И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Атомы, как известно, состоят из ядра и электронов. В гл. 4 при рассмотрении квантово-механической теории строения атома основное внимание было сосредоточено на поведении электронов. Изменения, происходящие в электронной оболочке атомов, обуславливают большую часть химических, электрических и оптических явлений. В этой главе будут рассматриваться строение атомного ядра и явления, связанные с изменениями, происходящими внутри ядра. Ядро – это центральная часть атома, имеющая размеры порядка  $10^{-15}$  м, в то время как размеры атома имеют порядок  $10^{-10}$  м. Таким образом, объём ядра много меньше объёма электронной оболочки атома, но в ядре сосредоточена практически вся масса атома.

### 5.1. Состав атомного ядра и его свойства. Ядерные силы

Ядро состоит из двух типов элементарных частиц – *протонов* и *нейтронов*. Протон имеет положительный заряд, равный по модулю заряду электрона, нейтрон не имеет электрического заряда. Масса протона составляет  $m_p = 1\,836\, m_e$ , где  $m_e$  – масса покоя электрона, а масса нейтрона равна  $m_n = 1\,839\, m_e$ .

Протоны и нейтроны имеют общее название – *нуклоны*. Считается, что протоны и нейтроны – это два зарядовых состояния одной частицы – нуклона.

Ядро принято характеризовать зарядовым числом  $Z$  и массовым числом  $A$ . *Зарядовое число*  $Z$  равно порядковому номеру элемента в таблице Менделеева и показывает полное число протонов в ядре. *Массовое число*  $A$  равно общему числу нуклонов в ядре, т. е. сумме всех протонов и нейтронов. Зная  $A$  и  $Z$ , можно найти число нейтронов в ядре атомов  $N = A - Z$ .



Ядра химических элементов обозначаются в виде  ${}^A_ZX$ , где  $X$  – символ данного химического элемента. Например, ядро атома меди  ${}^{64}_{29}\text{Cu}$  состоит из 64 нуклонов, из них – 29 протонов и 35 нейтронов.

*Изотопами* называются ядра с одинаковыми зарядовым числом  $Z$ , но с разными массовыми числами  $A$  (т. е. они отличаются количеством нейтронов). Водород, например, имеет три изотопа  ${}^1_1\text{H}$  – протий,  ${}^2_1\text{H}$  – дейтерий,  ${}^3_1\text{H}$  – тритий. В подавляющем большинстве изотопы имеют одинаковые или очень близкие свойства (кроме изотопов водорода), т. к. структура электронных оболочек у них одинакова.

*Изобарами* называются ядра с одинаковыми массовыми числами  $A$ , но с разными зарядовыми числами  $Z$ . Они состоят из одинакового числа нуклонов, но разного числа протонов (например,  ${}^{40}_{18}\text{Ar}$  и  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ).

*Радиус ядра* довольно точно определяется эмпирической формулой (в метрах):

$$R = 1,3 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3}. \quad (5.1)$$

Из формулы (5.1) следует, что объём ядра пропорционален числу нуклонов, содержащихся в ядре. Следовательно, плотность ядерного вещества во всех ядрах примерно одинакова и составляет гигантскую величину – порядка  $10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>.

*Момент импульса, или спин ядра* является его важнейшей характеристикой. Спины отдельных нуклонов складываются, образуя результирующий спин ядра. Протоны и нейтроны имеют спиновое квантовое число  $S = \frac{1}{2}$ , поэтому квантовое число  $I$ , определяющее спин ядра является полуцелым  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right)$  при нечётном числе нуклонов  $A$  и целым  $(0, 1, 2, 3, \dots)$  – при чётном  $A$ . Квантовое число  $I$  не превыша-

ет нескольких единиц, это говорит о том, что спины большинства нуклонов в ядре располагаются антипараллельно и компенсируют друг друга.

Собственный момент импульса, или спин ядра равен

$$L_{\text{яд}} = \hbar \sqrt{I(I+1)}. \quad (5.2)$$

Ядра атомов обладают также *магнитными моментами*. Однако магнитный момент ядра примерно на три порядка меньше магнитного момента электронов, входящих в состав данного атома. По этой причине магнитный момент атома в целом определяется преимущественно магнитными моментами входящих в него электронов.

Между нуклонами, образующими ядро, действуют *особые силы называемые ядерными*. Эти силы намного превосходят силы кулоновского отталкивания протонов, они способны удерживать нуклоны ядра на расстояниях порядка  $10^{-15}$  м. Ядерные силы характеризуют особый класс взаимодействий между физическими объектами, называемый сильным взаимодействием.

#### *Основные свойства ядерных сил*

1. Ядерные силы являются силами притяжения.
2. Ядерные силы – это силы короткодействующие. Радиус их действия составляет около  $10^{-15}$  м. При увеличении расстояния ядерные силы быстро уменьшаются до нуля и притяжение нуклонов сменяется их кулоновским отталкиванием.
3. Ядерные силы обладают свойствами зарядовой независимости. Это означает, что ядерные силы, действующие между двумя протонами, двумя нейтронами, протоном и нейтроном, одинаковы по величине.
4. Ядерным силам характерно свойство насыщения, оно заключается в том, что каждый нуклон в ядре взаимодей-

ствуется лишь с небольшим числом наиболее близких к нему нуклонов. Это свойство приводит к тому, что удельная энергия связи нуклонов в ядре с увеличением числа нуклонов не возрастает, а остаётся приблизительно постоянной величиной.

5. Ядерные силы зависят от взаимной ориентации спинов взаимодействующих нуклонов. Так, например, протон и нейтрон образуют ядро изотопа водорода  ${}^2_1\text{H}$  лишь в том случае, если их спины параллельны.

6. Ядерные силы не являются центральными. Нельзя представлять, что они действуют вдоль прямой соединяющей центры взаимодействующих нуклонов.

## 5.2. Энергия связи ядер. Дефект массы.

### Реакции деления и синтеза ядер

Поскольку между нуклонами в ядрах действуют ядерные силы, то атомные ядра являются достаточно устойчивыми образованиями. Важной характеристикой ядра является энергия связи.

Энергия связи ядра численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы разделить ядро на нуклоны и удалить их друг от друга на расстояние, исключающее их взаимодействие, без сообщения им кинетической энергии. Эта же энергия связи выделяется при образовании ядра из отдельных нуклонов. Таким образом, энергия покоя ядра оказывается меньше суммарной энергии покоя невзаимодействующих нуклонов, составляющих ядро, на величину, равную энергии связи нуклонов в ядре, вследствие чего существование ядра оказывается энергетически выгоднее, чем существование образующих его нуклонов по отдельности

$$E_{\text{ядра}} = \sum E_{\text{нукл}} - E_{\text{св}}, \text{ тогда} \quad \sum E_{\text{нукл}} - E_{\text{ядра}} = E_{\text{св}}. \quad (5.3)$$

В силу закона Эйнштейна о взаимосвязи массы и энергии  $E = mc^2$ , аналогичное соотношение существует между массой ядра и суммой масс образующих его нуклонов:  $\sum m_{\text{нукл}} - m_{\text{ядра}} = \Delta m$ , где  $\Delta m$  – *дефект массы ядра*. Таким образом, оказывается, что масса ядра всегда меньше суммы масс входящих в него нуклонов, взятых по отдельности на величину дефекта массы. Между энергией связи ядра и дефектом массы существует соотношение

$$E_{\text{связи}} = \Delta m c^2. \quad (5.4)$$

Зная число протонов и нейтронов в ядре, дефект массы можно выразить формулой

$$\Delta m = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n] - m_{\text{ядра}}, \quad (5.5)$$

где  $m_p$  – масса протона;  $m_n$  – масса нейтрона. Формулу (5.5) удобнее использовать, если вместо массы ядра  $m_{\text{ядра}}$  записать  $m$  – массу атома того или иного химического элемента, поскольку именно массы атомов обычно приводятся в таблицах:

$$\Delta m = [Z \cdot m_H + (A - Z) \cdot m_n] - m, \quad (5.6)$$

где  $m_H$  – масса атома водорода. Выражение в квадратных скобках в формуле (5.6) увеличилось на массу  $Z$  электронов

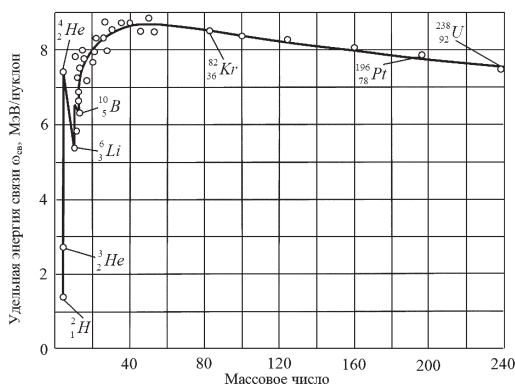


Рис. 5.1

( $m_H$  больше  $m_p$  на массу электрона  $m_e$ ), но  $m$  больше  $m_{\text{ядра}}$  также на массу  $Z \cdot m_e$ . Поэтому результаты вычислений по формулам (5.5) и (5.6) будут одинаковы.

Объединяя формулы (5.4) и (5.6), получим для энергии связи ядра выражение

$$E_{\text{связи}} = \{[Z \cdot m_H + (A - Z) \cdot m_n] - m\} \cdot c^2. \quad (5.7)$$

Кроме полной энергии ядро принято характеризовать с помощью удельной энергии связи. *Удельной энергией связи нуклонов в ядре* называется энергия связи, приходящаяся на один нуклон ядра данного химического элемента

$$\delta E_{\text{связи}} = \frac{E_{\text{связи}}}{A}. \quad (5.8)$$

На рис. 5.1 приведён график зависимости удельной энергии связи от массового числа  $A$ . Он показывает прочность связей нуклонов в ядрах различных химических элементов. Для лёгких ядер с  $A \leq 12$  величина  $\delta E_{\text{связи}}$  быстро возрастает до энергии в 6–7 МэВ при этом имеются пики удельной энергии связи. Они характерны для ядер с чётными числами протонов и нейтронов ( ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ). Максимум данной зависимости – около 8,7 МэВ – наблюдается для элементов с  $A = 50\text{--}60$ , эти ядра наиболее прочны. Далее, с увеличением числа нуклонов в ядре  $\delta E_{\text{связи}}$  убывает. Ядра атомов тяжёлых элементов, расположенные в конце периодической системы (например, уран  ${}^{238}_{92}\text{U}$ ) имеют удельную энергию связи около 7,6 МэВ.

Наличие максимума зависимости  $\delta E_{\text{связи}} = f(A)$  говорит о том, что наиболее устойчивыми являются ядра средней части периодической системы, легкие и тяжелые ядра менее устойчивы. По этой причине энергетически выгодными являются 2 процесса:

- 1) деление тяжёлых ядер на более лёгкие;
- 2) слияние (синтез) лёгких ядер в более тяжёлые.

Именно в этих реакциях происходит выделение ядерной энергии, имеющей большое практическое значение.

Для того чтобы осуществить процесс деления тяжёлых ядер, этим ядрам необходимо сообщить дополнительную энергию, называемую энергией активации. Тяжёлые ядра могут получить энергию активации при захвате ими дополнительных нейтронов. Деление тяжёлого ядра сопровождается выделением колоссального количества энергии. Например, при реакции деления одного ядра урана  ${}_{92}^{238}\text{U}$  выделяется энергия порядка 200 МэВ. Для сравнения – при сгорании угля  $\text{C} + \text{O}_2 = \text{CO}_2$  выделяется энергия 5 эВ на одну молекулу. Процесс деления ядер урана или плутония при захвате ими нейтронов лежит в основе работы атомных реакторов, неуправляемая ядерная реакция происходит при взрыве атомной бомбы.

Слиянию легких ядер в одно более тяжелое ядро препятствуют силы их кулоновского отталкивания. Для осуществления такой реакции необходимо сблизить ядра на очень малое расстояние порядка  $10^{-15}$  м. Это возможно, если ядра имеют огромные скорости, соответствующие температуре  $T \approx 10^8$  К. Синтез лёгких ядер называется термоядерной реакцией. Такие реакции протекают на Солнце и звездах. Неуправляемые термоядерные реакции были осуществлены при взрывах водородных бомб. В настоящее время разрабатываются установки для управляемого термоядерного синтеза.

### 5.3. Радиоактивность

*Радиоактивностью* называется процесс самопроизвольного превращения одних ядер в другие, который сопровождается испусканием некоторых частиц. Явление радиоактивности характерно для неустойчивых изотопов.

Естественная радиоактивность – это радиоактивность существующих в природе неустойчивых изотопов. Она была открыта в 1896 г. французским физиком А. Беккерелем.

Искусственная радиоактивность – это радиоактивность изотопов, полученных лабораторным путём в результате ядерных реакций. Принципиальных различий между этими двумя видами радиоактивности не существует, они подчиняются одним и тем же закономерностям.

Радиоактивный распад – это самопроизвольный процесс, который подчиняется законам статистики. Отдельные ядра распадаются независимо друг от друга. Допустим, что  $dN$  – это среднее число ядер, распавшихся за промежуток времени  $dt$ , т. е. за время от  $t$  до  $t + dt$ . Очевидно, что величина  $dN$  будет пропорциональна начальному количеству ядер  $N$  в момент времени  $t$  и продолжительности интервала времени  $dt$ :

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt, \quad (5.9)$$

где  $\lambda$  – постоянная радиоактивного распада, константа характерная для данного радиоактивного вещества. Знак минус показывает, что число нераспавшихся ядер со временем уменьшается.

Разделим переменные в выражении (5.9) и проинтегрируем:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda \cdot dt; \quad \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt; \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t.$$

Окончательно получим формулу, выражающую закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \quad (5.10)$$

где  $N_0$  – число радиоактивных ядер в начальный момент времени при  $t = 0$ ;  $N$  – число нераспавшихся ядер в момент времени  $t$ . В соответствии с формулой (5.10), число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненциальному закону.

*Периодом полураспада* называется время, за которое распадается половина радиоактивных ядер, имевшихся в начальный момент времени. Найдём время полураспада, используя формулу (5.10):

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T}, \text{ или } T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \quad (5.11)$$

Периоды полураспада известных в настоящее время радиоактивных изотопов меняются в широких пределах от  $3 \cdot 10^{-7}$  с до  $5 \cdot 10^{15}$  лет.

*Средним временем жизни* радиоактивного ядра называют время, за которое число ядер уменьшается в  $e$  раз ( $e = 2,72$  – основание натуральных логарифмов). Можно показать, что среднее время жизни связано с постоянной распада соотношением:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \quad (5.12)$$

– эта величина постоянна для данного радиоактивного изотопа: она не зависит от выбора начала отсчёта времени.

*Активностью изотопа* называется число распадов за единицу времени:

$$A = \frac{dN}{dt}. \quad (5.13)$$

С учётом формул (5.9) и (5.13), получим для активности распада формулу

$$A = \frac{\lambda \cdot N \cdot dt}{dt} = \lambda \cdot N. \quad (5.14)$$

Подставив выражение (5.10) в формулу (5.14) найдём закон изменения активности со временем:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \quad (5.15)$$

где  $A_0 = \lambda \cdot N_0$  – активность в момент времени  $t = 0$ .



Единицей активности в системе СИ является один распад в секунду. Эта единица называется Беккерель (Бк). Используется также внесистемная единица Кюри (Ки).  $1 \text{ Ки} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$ .

#### 5.4. Основные типы радиоактивности

Основными типами радиоактивного распада являются альфа-распад, бета-распад, электронный захват, спонтанное деление ядер. Как правило, все типы радиоактивного распада сопровождаются гамма-излучением – это коротковолновое электромагнитное излучение. Ядро, которое испытывает радиоактивный распад, называется материнским, вновь образующееся ядро – дочерним.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Альфа-распад протекает по схеме} \\ {}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He} , \\ \text{где } X \text{ и } Y - \text{химические символы материнского и дочер-} \\ \text{ного ядра, } {}^4_2 \text{He} - \text{ядро атома гелия } (\alpha\text{-частица}). \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Таким образом, при альфа-распаде возникают  $\alpha$ -лучи, представляющие собой поток ядер гелия  ${}^4_2 \text{He}$ . Примером  $\alpha$ -распада может служить превращение ядра урана в ядро тория:



Альфа-частицы вылетают из распавшегося ядра с огромными скоростями порядка  $10^7 \text{ м/с}$ . Кинетическая энергия частицы при этом составляет несколько МэВ. Двигаясь в воздухе, она может пройти путь в несколько сантиметров, образуя  $\sim 10^5$  пар ионов, расходуя на одну ионизацию в среднем 35 эВ. В твёрдом веществе пробег частицы составляет  $\sim 10^{-3} \text{ см}$ , т. е.  $\alpha$ -частицы полностью задерживаются обычным листом бумаги.

Альфа-распад обусловлен тем, что сильное взаимодействие не может обеспечить стабильность очень тяжёлых ядер с  $A > 200$  и  $Z > 82$ . Внутри таких ядер образуются обособленные частицы, которые испускаются ядром.

Различают три типа бета-распада: электронный распад или  $\beta^-$ -распад; позитронный распад, или  $\beta^+$ -распад; электронный захват, называемый также К-захватом.

|| Электронный распад протекает по схеме

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e + {}^0_0 \tilde{\nu}. \quad (5.18)$$

Из формулы (5.18) видно, что в процессе распада, зарядовое число дочернего ядра увеличивается на единицу, кроме того испускается электрон и антинейтрино. В качестве примера  $\beta^-$ -распада можно привести реакцию превращения тория в протактиний:



Как известно, электроны не входят в состав ядра, их появление при  $\beta^-$ -распаде можно объяснить тем, что один из нейтронов ядра самопроизвольно превращается в протон. Такой процесс возможен, поскольку энергия покоя нейтрона превышает энергию покоя протона и электрона вместе взятых на 782 кэВ. Таким образом, при  $\beta^-$ -распаде один из нейтронов ядра превращается в протон с образованием электрона и антинейтрино:

$${}^1_0 n \rightarrow {}^1_1 p + {}^0_{-1} e + {}^0_0 \tilde{\nu}. \quad (5.20)$$

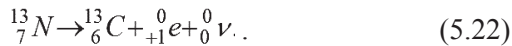
Реакция (5.20) была обнаружена и на свободных нейтронах, находящихся вне ядра, что подтвердило теорию  $\beta^-$ -распада. Изучение закономерностей  $\beta^-$ -распада привело В. Паули к предсказанию существования новой частицы нейтрино. Нейтрино имеет нулевой заряд, нулевую массу покоя и спин, равный 1/2. Эта частица была обнаружена экспериментально в 1956 г.

|| *Позитронный распад* происходит по следующей схеме:



В этом процессе зарядовое число дочернего ядра уменьшается на единицу, происходит испускание позитрона  ${}_{+1}^0e$  и нейтрино  ${}_0^0\nu$ . Позитрон имеет массу равную массе электрона, единичный положительный заряд и является античастицей для электрона. Антинейтрино – это античастица по отношению к нейтрино. Участие в  $\beta^-$ -распаде этих частиц диктуется законом сохранения момента импульса, спины нейтрино и антинейтрино равны  $1/2$ .

Примером позитронного распада может служить превращение азота  ${}_{7}^{13}N$  в углерод  ${}_{6}^{13}C$ :

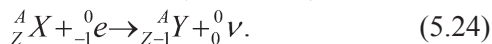


Позитрон в этой реакции возникает в результате превращения одного из протонов ядра в нейтрон. Такая реакция для свободных протонов невозможно, т. к. протону для этого потребовалась бы дополнительная энергия (масса протона меньше массы нейтрона). Однако превращение протона в нейтрон происходит в ядрах, где дополнительная энергия заимствуется у других нуклонов ядра.

Электронный захват происходит, когда атомное ядро захватывает электрон из ближайшей к нему К-оболочки (реже из L- или М-оболочек). После этого один из протонов ядра превращается в нейтрон, излучая также нейтрино:



|| *Схема электронного захвата (К-захвата) имеет вид*



Место в электронной оболочке, где ранее находился захваченный электрон, заполняется электронами с более высоких энергетических уровней. При этом возникает характерный рентгеновский спектр излучения, благодаря которому и был открыт К-захват.

Все рассмотренные виды  $\beta$ -распада, сопровождаются излучением  $\gamma$ -фотонов – электромагнитных квантов высокой энергии. Это связано с тем, что дочернее ядро, возникающее при  $\beta$ -распаде, может оказаться в одном из возбуждённых состояний. Переход его на более низкие уровни энергии приводят к излучению избыточной энергии в виде  $\gamma$ -квантов.

### 5.5. Элементарные частицы

Элементарными частицами в настоящее время называют большую группу микрочастиц, которые не являются атомами, молекулами или ядрами. За ними сохранилось традиционное название «элементарные», хотя это не обязательно означает отсутствие внутренней структуры у данных микрочастиц. Сейчас известно около 400 элементарных частиц, включая и античастицы. Большая часть этих частиц является нестабильными, они очень быстро распадаются.

В настоящее время для генерации элементарных частиц используются ускорители, в которых можно получать пучки заряженных частиц, таких как электроны, протоны, тяжёлые ионы с высокими энергиями в сотни ГэВ.

#### *Типы фундаментальных взаимодействий*

Известны 4 типа фундаментальных взаимодействий, в которых участвуют элементарные частицы: сильное, электромагнитное, слабое, гравитационное.

*1. Сильное взаимодействие* характерно для тяжёлых частиц. Оно обуславливает, в частности, связь нуклонов в ядре

и существование атомных ядер. Кроме того с сильным взаимодействием связаны: реакция рождения антипротона, реакции образования странных частиц.

2. *В электромагнитных взаимодействиях* принимают участие только электрически заряженные частицы и фотоны. Например, кулоновское взаимодействие обуславливает существование атомов. Электромагнитное взаимодействие ответственно за процессы рождения и аннигиляции электрон-позитронных пар и т. д.

3. *Слабое взаимодействие* присуще всем частицам, кроме фотонов. Оно отвечает за все виды  $\beta$ -распадов атомных ядер, включая и электронный захват, за процессы взаимодействия нейтрино и антинейтрино с веществом и за многие распады элементарных частиц.

4. *Гравитационное взаимодействие* является универсальным, оно присуще всем объектам Вселенной и всем без исключения элементарным частицам. Оно проявляется в виде сил всемирного тяготения в планетных системах, галактиках и т. д. В мире элементарных частиц данное взаимодействие заметной роли не играет. Характеристики фундаментальных взаимодействий приведены в табл. 5.1.

Интенсивность взаимодействия принято характеризовать с помощью константы взаимодействия – это безразмерный параметр, который определяет вероятность процессов для данного вида взаимодействий.

Из табл. 5.1 следует, что для элементарных частиц сильное взаимодействие является наиболее интенсивным, слабое наименее интенсивным, поэтому они и получили такие названия. Интенсивность гравитационного взаимодействия минимальна, его роль во Вселенной связана с тем, что массы астрономических объектов крайне велики.

Электромагнитные и гравитационные взаимодействия могут осуществляться на бесконечно больших расстояниях, сильное и слабое взаимодействия являются короткодействующими.

Таблица 5.1

**Характеристика фундаментальных взаимодействий**

<i>Взаимодействие</i>	<i>Механизм обмена частицами</i>	<i>Интенсивность взаимодействия</i>	<i>Радиус взаимодействия, м</i>	<i>Характерное время, с</i>
Сильное	Глюоны	$\sim 1$	$10^{-15}$	$\sim 10^{-23}$
Электромагнитное	Фотоны	$1/137 \approx 10^{-2}$	$\infty$	$\sim 10^{-20}$
Слабое	Промежуточные бозоны	$\sim 10^{-10}$	$10^{-18}$	$\sim 10^{-13}$
Гравитационное	Гравитоны	$\sim 10^{-38}$	$\infty$	—

Характерное время – это достаточно условное понятие, его можно рассматривать как среднее время жизни частиц, распадающихся за счёт данного взаимодействия.

Важнейшим достижением физики 70-х гг. XX в. явилось установление единого механизма всех *фундаментальных взаимодействий*, который носит *обменный характер* и заключается в испускании и поглощении данной частицей некоторой другой частицы, называемой переносчиком взаимодействия. Силы, которые возникают между двумя частицами, трактуются как результат их обмена промежуточными частицами, являющимися переносчиками данного взаимодействия.

### *Систематика элементарных частиц*

Элементарные частицы принято подразделять на три класса, основываясь на их отношении к фундаментальным взаимодействиям. Систематика элементарных частиц приведена в табл. 5.2.

К первому классу относится всего лишь одна частица – *фотон*. Фотоны участвуют в электромагнитных взаимодействиях, являясь переносчиками этих взаимодействий, но не участвуют в сильных и слабых взаимодействиях.

Второй класс составляют *лептоны* (с греч. – «лёгкие»). К этим частицам относятся: электроны ( $e^-$ ,  $e^+$ ), электронное нейтрино ( $\nu_e$ ,  $\bar{\nu}_e$ ), мюоны ( $\mu^-$ ,  $\mu^+$ ), мюонное нейтрино ( $\nu_\mu$ ,  $\bar{\nu}_\mu$ ), таоны ( $\tau^-$ ,  $\tau^+$ ), таонное нейтрино ( $\nu_\tau$ ,  $\bar{\nu}_\tau$ ). Спин лептонов равен  $1/2$ , т. е. все они являются фермионами. Все лептоны участвуют в слабых взаимодействиях, но не участвуют в сильных взаимодействиях. Лептоны, имеющие заряд, могут участвовать также в электромагнитных взаимодействиях. Лептонам приписывают *лептонный заряд*, характеризующийся квантовым числом  $L$ , считается, что  $L = +1$  для лептонов,  $L = -1$  для антилептонов и  $L = 0$  для всех остальных элементарных частиц.

Во всех процессах, происходящих с участием элементарных частиц, выполняется *закон сохранения лептонного заряда*, т. е. в процессах превращения частиц лептонный заряд сохраняется неизменным.

Третий класс элементарных частиц *адроны* – это частицы участвующие в сильных взаимодействиях. Они участвуют также в слабом, электромагнитном и гравитационном взаимодействиях. Адроны – наиболее многочисленная группа, она насчитывает около 400 частиц. Адроны делятся на 2 подгруппы:

- 1) *мезоны*, имеющие спин равный нулю;
- 2) *барионы*, имеющие спин –  $1/2$ .

Барионы, в свою очередь, делятся на *нуклоны* (протоны и нейтроны) и *гипероны*. Всем барионам приписывается *ба-*

рионный заряд, характеризуемый квантовым числом  $B$ . Для всех барионов  $B = +1$ , для антибарионов  $B = -1$ , для мезонов, лептонов и фотонов  $B = 0$ .

|| При всех взаимных превращениях элементарных частиц, происходящих в замкнутой системе, выполняется закон сохранения барионного заряда, который при таких превращениях остаётся неизменным.

К адронам также относится большая группа короткоживущих частиц, получивших название резонансы. Время жизни резонансов составляет  $10^{-22}$ – $10^{-24}$  с, резонансы не отражены в табл. 5.2.

Каждой частице в микромире соответствует античастица. У частицы и античастицы масса, спин, время жизни одинаковы, а другие характеристики – электрический заряд, магнитный момент, барионные и лептонные заряды, странность, очарование и другие – одинаковы по модулю и противоположны по знаку.

В качестве примеров частиц и античастиц можно привести: электрон  $e^-$  и позитрон  $e^+$ , протон  $p$  и антипротон  $\bar{p}$ , нейтрон  $n$  и антинейтрон  $\bar{n}$ , нейтрино  $\nu_e$  и антинейтрино  $\bar{\nu}_e$ . Пары  $e^-$  и  $e^+$ ,  $p$  и  $\bar{p}$  различаются в частности знаками электрического заряда. У пары  $n$  и  $\bar{n}$  различны по знаку барионный заряд и магнитный момент. Нейтрино и антинейтрино различаются знаками, так называемой спиральности. У лептонов и антилептонов различны по знаку лептонные заряды, у барионов и антибарионов противоположны барионные заряды.

Существуют истинно нейтральные частицы, для них все свойства частицы и античастицы тождественны. К ним относятся  $\gamma$ -фотон,  $\pi^0$ -мезон,  $\eta^0$ -мезон и несколько других частиц.



Таблица 5.2

Систематика элементарных частиц

Группа	Название частицы	Символ		Заряд, ед. $e$	Масса покоя, ед. $m_e$	Спин, ед. $\hbar$	Изоспин, $I$	Лептонное Число, $L$	Барионное Число, $B$	Странность, $S$	Кварковый состав
		частицы	античастицы								
1	2	3		4	5	6	7	8	9	10	11
Фотоны	Фотон	$\gamma$		0	0	1	—	0	0	0	—
	Электрон	$e^-$	$e^+$	1	1	1/2	—	+1	0	0	—
	Электронное нейтрино	$\nu_e$	$\bar{\nu}_e$	0	0	1/2	—	+1	0	0	—
	Мюон	$\mu^-$	$\mu^+$	1	206,8	1/2	—	+1	0	0	—
	Мюонное нейтрино	$\nu_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	0	0	1/2	—	+1	0	0	—
Лептоны	Таон	$\tau^-$	$\tau^+$	1	3487	1/2	—	+1	0	0	—
	Таонное нейтрино	$\nu_\tau$	$\bar{\nu}_\tau$	0	0	1/2	—	+1	0	0	—
	Пионы	$\left\{ \begin{matrix} \pi^0 \\ \pi^+ \end{matrix} \right.$		0	264,1	0	1	0	0	0	$u\bar{u}, d\bar{d}$
		$\pi^-$		1	273,1	0	1	0	0	0	$u\bar{d}, (d\bar{u})$
Мезоны											
Адроны											

<i>I</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	
Мезоны	Каоны	$\left\{ \begin{matrix} K^0 \\ K^+ \end{matrix} \right\}$	$K^0$	0	974,0	0	1/2	0	0	$d\bar{s}, \bar{s}d$	
		$K^-$		1	966,2	0	1/2	0	0	$u\bar{s}$	
	Эта-мезон	$\eta^0$		1	1 074	0	–	0	0	$u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}$	
	Протон	p	$\bar{p}$	1	1 836,2	1/2	1/2	0	+1	0	$uud$
	Нейтрон	<i>n</i>	$\bar{n}$	0	1 838,7	1/2	1/2	0	+1	0	$udd$
Гипероны											
Барыоны	Лямбда	$\Lambda^0$	$\bar{\Lambda}^0$	0	2 183	1/2	0	0	+1	–1	$uds$
	Сигма	$\left\{ \begin{matrix} \Sigma^0 \\ \Sigma^+ \\ \Sigma^- \end{matrix} \right\}$	$\bar{\Sigma}^0$	0	2 334	1/2	1	0	+1	–1	$uds$
			$\bar{\Sigma}^+$	1	2 328	1/2	1	0	+1	–1	$uus$
			$\bar{\Sigma}^-$	1	2 343	1/2	1	0	+1	–1	$dds$
	Кси	$\left\{ \begin{matrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{matrix} \right\}$	$\bar{\Xi}^0$	0	2 573	1/2	1/2	0	+1	–2	$uss$
			$\bar{\Xi}^-$	1	2 586	1/2	1/2	0	+1	–2	$dds$
	Омега	$\Omega^-$	$\bar{\Omega}^-$	1	3 273	3/2	0	0	+1	–3	$sss$

Понятие частицы и античастицы являются относительными. Так электрон считается частицей, а позитрон – античастицей лишь потому, что электронов во Вселенной неизмеримо больше, чем позитронов. Но в принципе их названия можно было бы поменять местами.

Исторически первой античастицей, обнаруженной экспериментально в 1932 г., является позитрон  $e^+$ . При встрече друг с другом медленные электрон и позитрон аннигилируют, образуя обычно два фотона:

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma.$$

При столкновениях быстрых электронов и позитронов могут рождаться самые различные частицы.

Аннигилируют не только электрон-позитронные пары, но и любая частица со своей античастицей при этом возникают не только  $\gamma$ -кванты, но и другие лёгкие частицы.

#### *Фундаментальные и составные частицы*

В настоящее время элементарные частицы разделяют на две группы: адроны и фундаментальные частицы. Адроны рассматриваются как составные частицы, фундаментальные частицы – как истинно элементарные, бесструктурные частицы. К фундаментальным частицам относят все лептоны и кварки, а также особая группа частиц, которые являются переносчиками взаимодействий. Все адроны состоят из кварков.

Кварки – это фундаментальные частицы с дробным электрическим зарядом. Кварковая модель была предложена в 60-х гг. XX в. М. Гелл-Манном и Дж. Цвейгом. В настоящее время она является общепризнанной.

Установлено существование шести разновидностей кварков, их называют также ароматами:  $u, d, s, c, b, t$ . Каждо-

му кварку соответствует антикварк. Спин всех кварков равен  $1/2$ , а барионный заряд –  $1/3$ . Значения некоторых квантовых чисел кварков приведены в табл. 5.3.

Каждый мезон строится из одного кварка и одного антикварка, например,  $\pi^+(u\bar{d})$ ,  $\pi^-(\bar{u}d)$ ,  $K^+(u\bar{s})$ . Каждый барион состоит из трех кварков:  $p( uud)$ ,  $n( udd)$ ,  $\Sigma^+(uus)$ ,  $\Lambda^0(uds)$  и т. д.

Таблица 5.3

Значения квантовых чисел

Тип (аромат) кварка	Электриче- ский заряд, $q$	Барионный заряд, $B$	Спин, $J$	Странность, $S$	Очарование, $C$	Красота, $b$	Правдивость (истинность)
$u$	+2/3	+1/3	1/2	0	0	0	0
$d$	-1/3	+1/3	1/2	0	0	0	0
$s$	-1/3	+1/3	1/2	-1	0	0	0
$c$	+2/3	+1/3	1/2	0	+1	0	0
$b$	-1/3	+1/3	1/2	0	0	+1	0
$t$	+2/3	+1/3	1/2	0	0	0	1

Кваркам приписывают ещё одно квантовое число, называемое цветом, оно принимает три значения:  $R$  (red – красный),  $G$  (green – зелёный),  $B$  (blue – голубой). Таким образом, каждый кварк может существовать в трёх формах –  $R$ ,  $G$ ,  $B$ . Антикваркам приписываются антицвета:  $\bar{R}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{B}$ .

Все адроны являются цветонейтральными (белыми) частицами. Например, в состав протона входят кварки:  $u$  (зелёный),  $u$  (голубой) и  $d$  (красный). Результирующий цвет получается нулевым (белым).

Таким образом, существует 6 кварков и 6 антикварков, каждый из них может существовать в 3 цветах, следовательно, полное число кварков составляет 36. Интенсивные поиски кварков в свободном состоянии не увенчались успехом.

В настоящее время считается, что кварки, являясь цветными объектами, не могут существовать в свободном состоянии в принципе. Они могут лишь входить в состав белых частиц – адронов.

Переносчики взаимодействий представляют третью группу фундаментальных частиц наряду с лептонами и кварками. В табл. 5.4 приведены основные свойства переносчиков взаимодействий.

Таблица 5.4

**Основные свойства переносчиков взаимодействий**

<i>Взаимодействие</i>	<i>Переносчики</i>	<i>Символ</i>	<i>Спин</i>	<i>Масса, ГэВ</i>
Сильное	8 глюонов	$g_i$	1	0
Электромагнитное	1 фотон	$\gamma$	1	0
Слабое	3 промежуточных бозона	$W^+, W^-, Z^0$	1	$\sim 80 \div 90$
Гравитационное	1 гравитон	$G$	2	0

Переносчиком *электромагнитного взаимодействия* является нейтральный безмассовый *фотон*. В данном взаимодействии участвуют все кварки, заряженные лептоны и сам фотон.

Переносчики *сильного взаимодействия* – это восемь безмассовых и электрически нейтральных *глюонов*.

*Промежуточные бозоны*  $W^+, W^-, Z^0$  обладают большими массами и несут заряд (см. табл. 5.4). Они служат переносчиками *слабого взаимодействия*, в котором участвуют практически все известные частицы, кроме фотона и глюонов.

Нейтральный безмассовый гравитон  $G$  служит переносчиком гравитационного взаимодействия, в котором участвуют все частицы. Квантовая теория гравитации находится в стадии развития, гравитоны экспериментально пока не обнаружены.

Таким образом, начальная структурная организация материи включает в себя лептоны 6 сортов и кварки 6 сортов, которые взаимодействуют путём обмена рассмотренными выше переносчиками взаимодействий.

### 5.6. Примеры решения задач к разделу «Атомное ядро и элементарные частицы»

**Пример 1.** Вычислить дефект массы и энергию связи ядра  ${}^7_3\text{L}$ .

Решение. Масса ядра всегда меньше суммы масс свободных (находящихся вне ядра) протонов и нейтронов, из которых ядро образовалось. Дефект массы ядра  $\Delta m$  и есть разность между суммой масс свободных нуклонов (протонов и нейтронов) и массой ядра, т. е.

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}, \quad (1)$$

где  $Z$  – атомный номер (число протонов в ядре);  $A$  – массовое число (число нуклонов, составляющих ядро);  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_{\text{я}}$  – соответственно, массы протона, нейтрона и ядра.

В справочных таблицах всегда даются массы нейтральных атомов, но не ядер, поэтому формулу (1) целесообразно преобразовать так, чтобы в неё входила масса  $m_{\text{я}}$  нейтрального атома. Можно считать, что масса нейтрального атома равна сумме масс ядра и электронов, составляющих электронную оболочку атома:  $m_{\text{а}} = m_{\text{я}} + Zm_e$ , откуда

$$m_{\text{я}} = m_{\text{а}} - Zm_e. \quad (2)$$

Выразив в равенстве (1) массу ядра по формуле (2), получаем

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{а}} + Zm_e, \text{ или}$$

$$\Delta m = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - m_{\text{а}}.$$

Замечая, что  $m_p + m_e = m_{\text{H}}$ , где  $m_{\text{H}}$  – масса атома водорода, окончательно находим

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_a. \quad (3)$$

Подставив в выражение (3) числовые значения масс из приложения А (см. табл. А5), получим

$$\Delta m = [3 \cdot 1,00783 + (7 - 3) \cdot 1,00867 - 7,01601] = 0,04216 \text{ а. е. м.}$$

В соответствии с законом пропорциональности массы и энергии,

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m, \quad (4)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

Коэффициент пропорциональности  $c^2$  может быть выражен двояко:

$$c^2 = 9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2, \text{ или } c^2 = \Delta E / \Delta m = 9 \cdot 10^{16} \text{ Дж/кг.}$$

Если вычислить энергию связи, пользуясь внесистемными единицами, то  $c^2 = 931 \text{ МэВ/а. е. м.}$  С учётом этого формула (4) принимает вид

$$E_{\text{св}} = 931 \Delta m \text{ (МэВ)}. \quad (5)$$

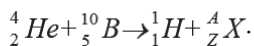
Подставив найденное значение дефекта массы ядра в формулу (5), получим

$$E_{\text{св}} = 931 \cdot 0,04216 \text{ МэВ} = 39,2 \text{ МэВ.}$$

**Ответ:** дефект массы  $\Delta m = 0,04216 \text{ а. е. м.}$  и энергия связи  $E_{\text{св}} = 39,2 \text{ МэВ.}$

**Пример 2.** При соударении  $\alpha$ -частицы с ядром бора  ${}^{10}_5\text{B}$  произошла ядерная реакция, в результате которой образовалось два новых ядра. Одним из этих ядер было ядро атома водорода  ${}^1_1\text{H}$ . Дать символическую запись ядерной реакции. Определить порядковый номер и массовое число второго ядра, и энергетический эффект реакции.

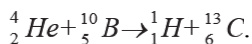
Решение. Обозначим неизвестное ядро символом  ${}^A_Z\text{X}$ . Так как  $\alpha$ -частица представляет собой ядро гелия  ${}^4_2\text{He}$ , запись реакции имеет вид



Применив закон сохранения числа нуклонов (иначе – закон сохранения барионного заряда), получим уравнение

$4 + 10 = 1 + A$ , откуда массовое число  $A = 13$ . Применяв закон сохранения заряда, получим уравнение  $2 + 5 = 1 + Z$ , откуда зарядовое число  $Z = 6$ . Поскольку зарядовое число одновременно является порядковым номером в таблице Менделеева, определяем, что неизвестное ядро является ядром атома изотопа углерода  ${}^{13}_6\text{C}$ .

Теперь можем записать реакцию в окончательном виде



Энергетический эффект  $Q$  (количество теплоты, выделяемое или поглощаемое в процессе ядерной реакции) определяется как разница между суммарной энергией ядер до и после реакции  $Q = \sum E_{\text{я}}^{\text{до}} - \sum E_{\text{я}}^{\text{после}}$ . Учитывая закон взаимосвязи массы и энергии ( $E = mc^2$ ) и переходя к внесистемным единицам (см. пример № 1) формула (5)), можно записать:

$$Q = 931[(m_{\text{He}} + m_{\text{B}}) - (m_{\text{H}} + m_{\text{C}})].$$

Здесь в первых круглых скобках указаны массы исходных ядер, во вторых скобках – массы ядер – продуктов реакции. При числовых подсчетах по этой формуле массы ядер заменяют массами нейтральных атомов.

Подставив массы атомов в расчётную формулу, получим  $Q = 931(4,00260 + 10,01294) - (1,00783 + 13,00335) \text{ МэВ} = 4,06 \text{ (МэВ)}$ .

Так как  $Q > 0$ , делаем вывод, что реакция идёт с выделением тепла.

**Ответ:** массовое число равно  $A = 13$ , порядковый номер элемента  $Z = 6$ , выделившееся количество теплоты  $Q = 4,06 \text{ МэВ}$ .

**Пример 3.** Определить начальную активность  $A_0$  радиоактивного препарата магния  ${}^{27}\text{Mg}$  массой  $m = 0,2 \text{ мкг}$ , а также его активность  $A$  через время  $t = 6 \text{ ч}$ . Период полураспада  $T_{1/2}$  магния считать известным.



**Решение.** Активность  $A$  изотопа характеризует скорость радиоактивного распада и определяется отношением числа  $dN$  ядер, распавшихся за интервал времени  $dt$ , к этому интервалу:

$$A = -\frac{dN}{dt}. \quad (1)$$

Знак « $-$ » показывает, что число  $N$  радиоактивных ядер с течением времени убывает. Для того чтобы найти  $dN/dt$ , воспользуемся законом радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где  $N$  – число радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, в момент времени  $t$ ;  $N_0$  – число радиоактивных ядер в момент времени, принятый за начальный ( $t = 0$ );  $\lambda$  – постоянная радиоактивного распада.

Продифференцируем выражение (1) по времени:

$$dN/dt = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

Исключив из формул (1) и (2)  $dN/dt$ , находим активность препарата в момент времени  $t$ :

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \quad (3)$$

Начальную активность  $A_0$  препарата получим при  $t = 0$ :

$$A_0 = \lambda N_0. \quad (4)$$

Постоянная радиоактивного распада  $\lambda$  связана с периодом полураспада  $T_{1/2}$  соотношением

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}. \quad (5)$$

Число  $N_0$  радиоактивных ядер, содержащихся в изотопе, равно произведению постоянной Авогадро  $N_A$  на количество вещества  $\nu$  данного изотопа:

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A, \quad (6)$$

где  $m$  – масса изотопа;  $M$  – молярная масса.

С учётом выражений (5) и (6) и формул (4), (3) принимают вид

$$A_0 = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A; \quad (7)$$

$$A = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_A e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}. \quad (8)$$

Произведём вычисления, учитывая, что  $T_{1/2} = 10 \text{ мин} = 600 \text{ с}$ ;  $\ln 2 = 0,639$ ;  $t = 6 \text{ ч} = 63,6 \cdot 10^3 \text{ с} = 2,16 \cdot 10^4 \text{ с}$ :

$$A_0 = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0,639}{600} 6,02 \cdot 10^{23} = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ (Бк)};$$

$$A = \frac{0,2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0,639}{600} 6,02 \cdot 10^{23} e^{-\frac{0,693}{600} 2,16 \cdot 10^4} = 81,3 \text{ (Бк)}.$$

**Ответ:**  $A_0 = 5,13 \cdot 10^{12} \text{ Бк}$ ,  $A = 81,3 \text{ Бк}$ .

### *Контрольные вопросы*

1. Охарактеризуйте состав и свойства атомного ядра.

а) назовите элементарные частицы, входящие в состав ядра, сравните массы, заряды и спины этих частиц;

б) какую информацию о составе ядра можно получить, зная зарядовое и массовое число ядра? Определите состав ядра химического элемента, занимающего девятую клетку в таблице Менделеева и имеющего массу равную 19 а. е. м. (округлённо);

в) что такое изотопы? Приведите примеры;

г) момент импульса (спин) ядра складывается из спинов нуклонов, входящих в его состав.

Для каких из нижеперечисленных ядер квантовое число, определяющее спин ядра, оказывается целочисленным:

${}_{13}^{27}\text{Al}$ ,  ${}_{16}^{32}\text{S}$ ,  ${}_{25}^{54}\text{Mn}$ ,  ${}_{30}^{65}\text{Zn}$ ?

2. Между протонами, входящими в состав ядра, действуют кулоновские силы отталкивания. Почему протоны не разлетаются, а удерживаются в составе ядра? Перечислите основные свойства ядерных сил.

Что означает свойство зарядовой независимости ядерных сил?

3. Дайте определения понятиям «энергии связи ядра», «удельная энергия связи». Сравните энергию ядра с суммарной энергией нуклонов, входящих в состав ядра и запишите в виде формулы связь между этими величинами.

4. Что такое дефект массы? По каким формулам можно рассчитать дефект массы?

5. Изобразите примерный график зависимости удельной энергии связи от массового числа. Используя график, поясните какие два типа реакций идут с выделением ядерной энергии. Охарактеризуйте основные особенности реакции деления тяжёлых ядер. Охарактеризуйте основные особенности реакции синтеза лёгких ядер.

6. В чём сущность явления радиоактивности? Назовите виды радиоактивности.

Что такое  $\gamma$ -лучи, сопровождающие радиоактивный распад, что является источником  $\gamma$ -излучения?

7. Выведите формулу, выражающую закон радиоактивного распада:

- а) поясните смысл формулы;
- б) нарисуйте соответствующий график;
- в) дайте определение среднего времени жизни радиоактивного ядра.

8. Дайте определение периода полураспада радиоактивного ядра.

Выведите формулу связи периода полураспада с постоянной распада. Нанесите на предыдущий график точки, соответствующие моментам времени  $T$ ,  $2T$ ,  $3T$ . Известно, что для некоторого изотопа период полураспада  $T = 60$  часов:

а) через сколько часов после начала наблюдения количество ядер уменьшится в 8 раз?

б) через сколько часов после начала наблюдения останется четверть из начального числа ядер?

в) через сколько часов после начала наблюдения распадётся  $\frac{3}{4}$  из начального количества ядер?

**9.** Дайте определение активности распада, приведите формулы и единицы измерения.

**10.** Запишите схемы  $\alpha$ -распада,  $\beta^-$ -распада,  $\beta^+$ -распада. Определите, какому химическому элементу принадлежит дочернее ядро, образовавшееся после  $\alpha$ -распада ядра радия  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$ . Определите, какому химическому элементу принадлежит дочернее ядро, образовавшееся после  $\beta^+$ -распада ядра азота  ${}^{13}_7\text{N}$ . Ядро с параметрами  $Z_1$  и  $A_1 = 238$  испытывает последовательно несколько  $\alpha$ - и  $\beta^-$ -распадов, в результате чего образуется ядро с параметрами  $Z_2 = Z_1 - 2$  и  $A_2 = 230$ . Определите количество распадов каждого вида.

**11.** Известно, что электроны не входят в состав ядра. Как в этом случае можно объяснить их появление в процессе  $\beta^-$ -распада?

**12.** Какие частицы называются элементарными?

**13.** Известны четыре типа фундаментальных взаимодействий: гравитационное, электромагнитное, сильное, слабое:

а) дайте характеристику каждому виду взаимодействий;

б) назовите частицы, являющиеся переносчиками данных взаимодействий;

в) сравните интенсивность разных типов взаимодействий;

- г) запишите радиус каждого из видов взаимодействий;  
д) запишите характерное время для каждого из видов взаимодействий.

**14.** Назовите основные классы элементарных частиц.

**15.** Законы сохранения энергии, импульса, момента импульса, электрического заряда действуют, как в макро-, так и в микромире. Но взаимодействие и взаимопревращение элементарных частиц подчиняются некоторым, специфическим законам сохранения. Назовите и сформулируйте известные вам специфические законы сохранения, характерные для процессов с участием элементарных частиц.

**16.** Чем отличаются частицы и античастицы? Приведите примеры частиц и античастиц.

**17.** Дайте определения кваркам, перечислите их типы и свойства.

#### *Рекомендуемая литература*

1. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 3: Оптика. Атомная физика. Физика ядра и элементарных частиц: учеб. пособие / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург: Лань, 2005. – 320 с.
2. Сивухин Д.И. Общий курс физики. Т. 5: Атомная и ядерная физика. – Москва: Физматлит, 2002. – 782 с.

## **Глава 6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

### **6.1. Требования к оформлению контрольных работ**

1. Контрольные работы выполняются в школьной тетради. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по таблицам с учётом направления подготовки. Номер варианта определяется по последней цифре номера зачётной книжки.

2. Условия задач контрольной работы надо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставлять поля.

3. Решение каждой задачи необходимо начинать с краткого описания сущности рассматриваемого явления (2–3 предложения) и формулировки основного закона, описывающего явление, с расшифровкой всех буквенных обозначений.

4. Далее приводится краткая запись условия и, где это возможно, поясняющий рисунок. Каждый шаг в ходе решения следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями.

5. Решать задачу надо в общем виде (в буквенных обозначениях). Полученную расчётную формулу проверить по единицам измерения.

6. Числовые значения величин при подстановке их в расчётную формулу следует выражать только в единицах СИ. Числовые значения физических констант и табличных коэффициентов приведены в приложении А.

7. При подстановке в расчётную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать в стандартной форме. Например, вместо 3 520 надо записать  $3,52 \cdot 10^3$ , вместо 0,00129 записать  $1,29 \cdot 10^{-3}$  и т. п.

8. Вычисления по расчётной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений. Как правило, окончательный результат следует записывать с тремя значащими цифрами.

## 6.2. Задания для самостоятельного решения к разделам физики\*

### *Колебательные процессы*

**601.** Однородный стержень длиной  $L = 0,6$  м и массой  $m = 5$  кг совершает колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов, с амплитудой  $\varphi^{\max} = 10^\circ$ . Какова максимальная угловая скорость стержня? Трением пренебречь.

**602.** Шарик массой  $m = 60$  г, подвешенный на лёгкой нити длиной  $l = 1$  м, совершает малые колебания относительно положения равновесия, при этом его полная энергия  $W = 0,02$  Дж. В начальный момент времени ( $t = 0$ ) смещение шарика от положения равновесия равно  $0,13$  м. Записать уравнение простого гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

**603.** Грузик массой  $m = 40$  г, прикрепленный к пружине жёсткостью  $k = 0,7$  Н/м, находится на гладкой горизонтальной поверхности. Колебания смещения грузика от положения равновесия происходят по закону синуса без начальной фазы. Максимальная скорость грузика составляет  $0,125$  м/с. Записать уравнения изменения смещения и скорости грузика с течением времени.

**604.** Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью  $L = 3,2$  мГн и конденсатора ёмкостью  $C = 0,02$  мкФ. Конденсатор зарядили до напряжения  $U = 200$  В и отключили от источника. Записать закон изменения заряда на обклад-

---

\* Номера задач соответствуют определённому разделу физики.

ках конденсатора с течением времени. Определить максимальную силу тока в катушке и максимальное значение энергии магнитного поля. Сопротивлением пренебречь.

**605.** Катушка, индуктивность которой  $L = 3 \cdot 10^{-5}$  Гн, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин  $S = 100$  см<sup>2</sup> и расстоянием между ними  $d = 0,1$  мм. Определить диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на частоту колебаний 0,4 МГц. Определить также амплитудное значение напряжённости электрического поля конденсатора, если полная энергия в контуре  $W = 20$  мкДж.

**606.** Написать уравнение гармонического колебательного движения, период колебаний которого  $T = 2$  с, если смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени равно 30 мм, а максимальное ускорение 0,6 м/с<sup>2</sup> (принять  $\pi^2 = 10$ ).

**607.** Уравнение движения материальной точки имеет вид:  $x = 0,04 \sin\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$  м. Определить период колебаний, максимальную скорость и скорость точки в начальный момент времени. Через какой промежуток времени кинетическая энергия материальной точки будет равна потенциальной?

**608.** Материальная точка массой  $m = 32$  г участвует в колебательном движении, закон смещения для которого имеет вид:  $x = 0,1 \sin\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right)$  м. Записать закон изменения силы, действующей на точку, с течением времени. Через какой промежуток времени сила, действующая на материальную точку, будет в 2 раза меньше её максимального значения?

**609.** Для материальной точки массой  $m$  написать уравнение синусоидальных колебаний, происходящих с периодом 0,8 с и начальной фазой  $\pi/2$ . Найти массу материальной точ-



ки, если максимальная сила, действующая на неё равна 12 мН, а полная энергия колебаний составляет 120 мкДж.

**610.** Чему равно отношение кинетической энергии точки, совершающей гармонические колебания, к её потенциальной энергии для моментов времени  $t_1 = \frac{T}{8}$  и  $t_2 = \frac{T}{6}$ ? Начальная фаза колебаний равна нулю.

**611.** В электрическую цепь переменного тока с частотой 50 Гц включены последовательно резистор с сопротивлением 8,4 Ом и идеальная катушка индуктивности ( $L = 2 \cdot 10^{-2}$  Гн). Изобразить векторную диаграмму. Определить полное сопротивление цепи и сдвиг фаз между током и напряжением

**612.** В электрическую цепь переменного тока с частотой 50 Гц включены последовательно резистор с сопротивлением 16,8 Ом и идеальная катушка индуктивности. Полное сопротивление цепи оказалось равным 21 Ом. Изобразить векторную диаграмму. Определить индуктивность катушки и сдвиг фаз между током и напряжением.

**613.** В электрическую цепь переменного тока включены последовательно, резистор с сопротивлением 8,4 Ом и идеальная катушка индуктивности ( $L = 4,6 \cdot 10^{-2}$  Гн). Изобразить векторную диаграмму. Определить полное сопротивление цепи и циклическую частоту переменного тока, если сдвиг фаз между током и напряжением равен  $\pi/3$ .

**614.** В электрическую цепь переменного тока с частотой 50 Гц включены последовательно резистор с сопротивлением 8,4 Ом и конденсатор с емкостью 507 мкФ. Изобразить векторную диаграмму. Определить сдвиг фаз между током и напряжением и полное сопротивление цепи.

**615.** В электрическую цепь переменного тока с частотой 50 Гц включены последовательно, резистор с сопротивлением 16,8 Ом и конденсатор. Полное сопротивление цепи ока-

залось равным 21 Ом. Изобразить векторную диаграмму. Определить ёмкость конденсатора и сдвиг фаз между током и напряжением.

**616.** В электрическую цепь переменного тока включены последовательно, резистор с сопротивлением 18 Ом и конденсатор с ёмкостью 51 мкФ. Изобразить векторную диаграмму. Определить полное сопротивление цепи и циклическую частоту переменного тока, если сдвиг фаз между током и напряжением равен  $\pi/3$ .

**617.** В электрическую цепь переменного тока с частотой 50 Гц включены последовательно резистор и конденсатор с ёмкостью 24,5 мкФ. Полное сопротивление при этом оказалось равным 136 Ом. Изобразить векторную диаграмму. Определить активное сопротивление цепи и сдвиг фаз между током и напряжением.

**618.** В электрическую цепь переменного тока с частотой 50 Гц включены последовательно, резистор и конденсатор. Эффективные значения тока и напряжения равны, соответственно, 2 А и 220 В, а потребляемая мощность – 312,4 Вт. Изобразить векторную диаграмму. Определить сдвиг фаз между током и напряжением в цепи и соотношение между активным и ёмкостным сопротивлением.

**619.** В электрическую цепь переменного тока с частотой 50 Гц включены последовательно резистор и катушка индуктивности. Эффективные значения тока и напряжения равны, соответственно, 2 А и 220 В, а потребляемая мощность – 220 Вт. Изобразить векторную диаграмму. Определить сдвиг фаз между током и напряжением в цепи и соотношение между активным и индуктивным сопротивлением.

**620.** В электрическую цепь переменного тока с частотой 50 Гц включены последовательно резистор и катушка индуктивности. Эффективные значения тока и напряжения равны,

соответственно 2 А и 220 В. Изобразить векторную диаграмму. Определить сдвиг фаз между током и напряжением в цепи и потребляемую мощность, если, индуктивное сопротивление в 1,73 раза больше активного.

**621.** Складываются два колебания одинакового направления с одинаковой частотой и амплитудой:  $x_1 = A_1 \cos \omega_1 t$  и  $x_2 = A_2 \cos[\omega_2(t + \tau)]$ , где  $A_1 = A_2 = 5$  см,  $\omega_1 = \omega_2 = \pi \text{ с}^{-1}$ ,  $\tau = 0,5$  с. Построить векторную диаграмму для момента времени  $t = 0$ . Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, написать его уравнение.

**622.** При сложении гармонических колебаний одного направления с одинаковыми периодами  $T_1 = T_2 = 2$  с и амплитудами  $A_1 = 10$  см и  $A_2 = 6$  см получается колебание с амплитудой  $A_{\text{рез}} = 14$  см. Определить разность фаз складываемых колебаний и записать уравнение результирующего колебания, если известно, что начальная фаза первого колебания равна нулю.

**623.** Точка участвует в двух колебаниях, уравнения которых имеют вид:  $x_1 = 4 \cos \pi \cdot t$  и  $x_2 = 3 \sin \pi \cdot t$ . Построить векторную диаграмму для момента времени  $t = 0$ . Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, написать его уравнение.

**624.** Складываются три гармонических колебания, уравнения которых имеют вид:

$$x_1 = 0,08 \cos 2\pi \cdot t \text{ (м);}$$

$$x_2 = 0,03 \cos \left( 2\pi \cdot t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ (м);}$$

$$x_3 = 0,05 \cos (2\pi \cdot t + \pi) \text{ (м).}$$

Построить векторную диаграмму для момента времени  $t = 0$ . Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, написать его уравнение.

**625.** При какой разности фаз складываемых колебаний с одинаковыми амплитудами  $A_0$  амплитуда результирующего колебания окажется равной  $A_{\text{рез}} = A_0 \sqrt{(2 + \sqrt{3})}$ ? Проиллюстрировать решение с помощью векторной диаграммы. Складываемые колебания гармонические, происходят в одном направлении и имеют одинаковые периоды.

**626.** Разность фаз складываемых гармонических колебаний одного направления  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{3}$ . Амплитуды складываемых колебаний отличаются в два раза, а частоты одинаковы. Чему равна меньшая амплитуда, если амплитуда результирующего колебания составляет 3,46 см?

**627.** В результате сложения двух гармонических колебаний одного направления с одинаковыми частотами и амплитудами возникает колебание, описываемое, уравнением  $x_{\text{рез}} = 3,46 \cos\left(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$ . Проиллюстрировать описанную ситуацию с помощью векторной диаграммы. Записать уравнения складываемых колебаний с числовыми коэффициентами, если известно, что начальная фаза одного из них равна нулю.

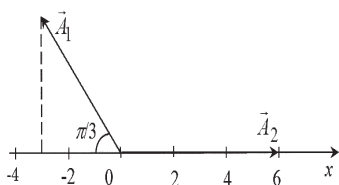


Рис. 6.1

**628.** На рис. 6.1 представлена, векторная диаграмма сложения гармонических колебаний с одинаковым периодом  $T = 3$  с. Записать уравнения складываемых и результирующего колебаний.

**629.** Определить разность фаз складываемых колебаний, если известно, что амплитуды складываемых колебаний

$A_1 = 0,05$  м и  $A_2 = 0,03$  м, а амплитуда результирующего колебания  $A_{\text{рез}} = 0,07$  м. Изобразить векторную диаграмму при условии, что начальная фаза первого колебания равна  $\pi/6$ .

**630.** Используя метод векторных диаграмм, выполнить сложение двух колебаний, описываемых уравнениями:  $x_1 = 0,1 \cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$  и  $x_2 = 0,06 \cos\left(\frac{2\pi t}{3} + \frac{\pi}{2}\right)$ . Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания и записать его уравнение.

### *Волновые процессы*

**701.** В упругой среде распространяется звуковое колебание с частотой 450 Гц и амплитудой 0,3 мм. Длина волны – 80 см. Запишите уравнение волны и определите: 1) скорость распространения волны; 2) максимальную скорость частиц среды.

**702.** Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура равен 1,2 с, амплитуда – 2 см. Запишите уравнение волны и определите: 1) длину волны; 2) фазу колебаний, смещение, скорость, и ускорение точки отстоящей, на расстоянии  $x = 45$  м от источника волн в момент  $t = 4$  с; 3) разность фаз колебаний двух точек, лежащих на одном луче и отстоящих от источника волн на расстояниях  $x_1 = 20$  м и  $x_2 = 30$  м.

**703.** Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси  $x$  в среде, не поглощающей энергию, со скоростью 10 м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях  $x_1 = 7$  м и  $x_2 = 10$  м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз  $\Delta\varphi = 3\pi/5$ . Амплитуда волны – 5 см. Определите 1) длину волны; 2) уравнение волны; 3) смещение второй точки в момент времени 2 с.

**704.** Задано уравнение плоской волны  $\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ , где  $A = 0,5$  см,  $\omega = 628$  с<sup>-1</sup>,  $k = 2$  м<sup>-1</sup>. Определить: 1) частоту колебаний  $\nu$  и длину волны  $\lambda$ ; 2) фазовую скорость  $v$ ; 3) максимальные значения скорости и ускорения колебаний частиц среды.

**705.** Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 10 м/с. Период колебаний точек шнура равен 1 с, амплитуда – 5 см. Запишите уравнение волны и определите: 1) длину волны; 2) фазу колебаний, смещение, скорость, и ускорение точки, расположенной на расстоянии 9 м от источника волн в момент  $t = 2,5$  с.

**706.** Звуковые колебания, имеющие частоту  $\nu = 0,5$  кГц и амплитуду  $A = 0,25$  мм, распространяются в упругой среде. Длина волны  $\lambda = 70$  см. Найти: 1) скорость  $v$  распространения волн; 2) максимальную скорость  $v_{max}$  частиц среды.

**707.** Волна с периодом  $T = 1,2$  с и амплитудой колебаний  $A = 2$  см распространяется со скоростью  $v = 15$  м/с. Чему равно смещение  $\xi(x, t)$  точки, находящейся на расстоянии  $x = 45$  м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время  $t = 4$  с?

**708.** Плоская звуковая волна имеет период  $T = 3$  мс, амплитуду  $A = 0,2$  мм и длину волны  $\lambda = 1,2$  м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние  $x = 2$  м, найти: 1) смещение  $\xi(x, t)$  в момент  $t = 7$  мс; 2) скорость и ускорение для того же момента времени. Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

**709.** По длинному шнуру бежит волна со скоростью 200 м/с. Амплитуда колебаний точек шнура равна 5 см, частота колебаний – 5 Гц. Запишите уравнение бегущей волны, взяв за начало отсчёта координату конца шнура  $x = 0$ , а начало отсчёта времени с момента начала колебаний этого конца шнура.

**710.** Волна с периодом колебаний  $T = 0,04$  с и амплитудой  $A = 0,4$  м имеет скорость распространения  $c = 300$  м/с. Запишите уравнение волны и определите: 1) длину волны; 2) фазу колебаний, смещение, скорость, и ускорение точки отстоящей на расстоянии  $x = 40$  м от источника волн в момент  $t = 2$  с; 3) разность фаз  $\Delta\varphi$  колебаний двух точек, отстоящих от источника колебаний на расстояниях  $l_1 = 10$  м и  $l_2 = 16$  м.

**711.** На плоскопараллельную плёнку с показателем преломления  $n = 1,33$  под углом  $i = 45^\circ$  падает параллельный пучок белого света. Определите, при какой наименьшей толщине плёнки зеркально отражённый свет наиболее сильно окрасится в жёлтый цвет ( $\lambda = 0,6$  мкм).

**712.** На стеклянный клин ( $n = 1,5$ ) нормально падает монокроматический свет ( $\lambda = 698$  нм). Определите угол между поверхностями клина, если расстояние между двумя соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 2 мм.

**713.** Монокроматический свет падает нормально на поверхность воздушного клина, причем расстояние между интерференционными полосами  $\Delta x = 0,4$  мм. Определите расстояние  $\Delta x$  между интерференционными полосами, если пространство между пластинками, образующими клин, заполнить прозрачной жидкостью с показателем преломления  $n = 1,33$ .

**714.** Поверхности стеклянного клина образуют между собой угол  $\alpha = 0,2^\circ$ . На клин нормально к его поверхности падает пучок лучей монокроматического света с длиной волны  $\lambda = 0,55$  мкм. Определить ширину  $b$  интерференционной полосы.

**715.** Пучок монокроматических ( $\lambda = 0,6$  мкм) световых волн, падает под углом  $\alpha = 30^\circ$  на находящуюся в воздухе

мыльную плёнку ( $n = 1,3$ ). При какой наименьшей толщине  $d$  плёнки отражённые световые волны будут максимально ослаблены интерференцией? Максимально усилены?

**716.** Расстояние  $d$  между двумя когерентными источниками света ( $\lambda = 0,5$  мкм) равно  $0,1$  мм. Расстояние  $b$  между интерференционными полосами на экране в спектре первого порядка равно  $1$  см. Определить расстояние  $l$  от источников до экрана.

**717.** На стеклянный клин падает нормально параллельный пучок красного света ( $\lambda_1 = 631$  нм). Расстояние между соседними красными полосами при этом равно  $l_1 = 3$  мм. Затем, этот же клин, освещается при тех же условиях синим светом ( $\lambda_2 = 400$  нм). Найти расстояние  $l_2$  между соседними синими полосами.

**718.** Между стеклянной пластинкой и лежащей на ней плосковыпуклой стеклянной линзой налита жидкость, показатель преломления, которой меньше показателя преломления стекла. Радиус  $r$  восьмого тёмного кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете ( $\lambda = 700$  нм) равен  $2$  мм. Радиус  $R$  кривизны выпуклой поверхности линзы равен  $1$  м. Найти показатель преломления жидкости  $n$ .

**719.** Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 0,6$  мкм, падающим нормально. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью, и наблюдение ведётся в проходящем свете. Радиус кривизны линзы —  $R = 4$  м. Определите показатель преломления жидкости, если радиус второго светлого кольца  $r = 1,8$  мм.

**720.** Две плоскопараллельные стеклянные пластинки образуют клин с углом  $\alpha = 30'' = (8,3 \cdot 10^{-3})^\circ$ . Пространство между пластинками заполнено глицерином. На клин нормально к его поверхности падает пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 500$  нм. В отражённом свете наблю-



дается интерференционная картина. Какое число  $N$  тёмных интерференционных полос приходится на 1 см длины клина?

**721.** Лазерный луч красного цвета  $\lambda_1 = 700$  нм падает на дифракционную решётку с числом штрихов  $N_1 = 250$  на 1 мм. Сколько необходимо иметь штрихов на 1 мм в решётке, чтобы при замене лазера красного цвета на лазер с жёлтым цветом  $\lambda_2 = 500$  нм дифракционная картина не изменила своего пространственного расположения?

**722.** На дифракционную решётку, имеющую 200 штрихов на 1 мм, падает нормально свет с длиной волны 500 нм. Расстояние от решётки до экрана 1 м. Найти расстояние от центрального до первого максимума и общее число максимумов, даваемых решёткой.

**723.** На щель шириной  $a = 0,1$  мм падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 550$  нм. Экран, на котором, наблюдается дифракционная картина, расположен параллельно щели на расстоянии  $L = 1,1$  м. Определите расстояние  $b$  между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального максимума.

**724.** На дифракционную решётку нормально к её поверхности падает монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 550$  нм. На экран, находящийся от решётки на расстоянии  $L = 1$  м, с помощью линзы, расположенной вблизи решётки, проецируется дифракционная картина, причём первый главный максимум наблюдается на расстоянии  $l = 12$  см от центрального. Определить: 1) период дифракционной решётки; 2) число штрихов на 1 см её длины; 3) общее число максимумов, даваемых решёткой; 4) угол дифракции, соответствующий последнему максимуму.

**725.** На дифракционную решётку нормально падает монокроматический свет с длиной волны  $0,65 \text{ мкм}$ . На экране, расположенном параллельно решётке и отстоящем от неё на расстоянии  $0,5 \text{ м}$ , наблюдается дифракционная картина. Расстояние между дифракционными максимумами первого порядка равно  $10 \text{ см}$ . Определите постоянную, дифракционной решётки и общее число главных максимумов, получаемых с помощью этой решётки.

**726.** Световая волна длиной  $530 \text{ нм}$  падает перпендикулярно на прозрачную дифракционную решётку, постоянная которой равна  $1,8 \text{ мкм}$ . Определить угол дифракции, под которым образуется максимум наибольшего порядка.

**727.** На дифракционную решётку, имеющую  $500$  штрихов на миллиметр, падает плоская монокроматическая волна ( $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ ). Определить наибольший порядок спектра, который можно наблюдать при нормальном падении лучей на решётку и угол дифракции, соответствующей последнему максимуму.

**728.** На щель шириной  $a = 0,1 \text{ мм}$  падает нормально монокроматический свет, с длиной волны  $\lambda = 500 \text{ нм}$ . Дифракционная картина проецируется на экран, параллельный плоскости щели, с помощью линзы, расположенной вблизи щели. Определить расстояние от экрана до линзы, если расстояние  $l$  между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального максимума равно  $1 \text{ см}$ .

**729.** На дифракционную решётку нормально падает монокроматический свет с длиной волны  $\lambda = 600 \text{ нм}$ . Определите наибольший порядок спектра, полученный с помощью этой решётки и угол дифракции, соответствующей последнему максимуму, если её постоянная  $d = 2 \text{ мкм}$ .

**730.** На дифракционную решётку в направлении нормали к её поверхности падает монокроматический свет. Период решётки  $d = 2 \text{ мкм}$ . Определить наибольший порядок

дифракционного максимума угол дифракции, соответствующий последнему максимуму, который дает эта решётка в случае красного ( $\lambda_1 = 0,7$  мкм) и в случае фиолетового ( $\lambda_2 = 0,41$  мкм) света.

**731.** Найти угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света проходящего через эту систему, уменьшается в 4 раза.

**732.** Два поляризатора расположены так, что угол между их плоскостями составляет  $\varphi = 30^\circ$ . Определите, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при его прохождении через оба поляризатора.

**733.** Во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, проходящего через два поляризатора, угол между плоскостями которых равен  $60^\circ$ , и в каждом из них теряется 8 % падающего света?

**734.** Угол между главными плоскостями анализатора и поляризатора составляет  $30^\circ$ . Определить изменение интенсивности прошедшего через них света.

**735.** Неполяризованный свет падает на систему из 3 поляризаторов. Плоскости поляризации первого и последнего взаимно перпендикулярны, а плоскость среднего поляризатора образует угол  $\varphi = 30^\circ$  с плоскостью первого. Как изменится интенсивность света на выходе из системы?

**736.** Интенсивность естественного света, прошедшего через 2 николя, уменьшилась в 8 раз. Пренебрегая поглощением, определите угол между плоскостями поляризации николей.

**737.** Пучок естественного света падает на систему из 6 николей, плоскость пропускания каждого из которых повернута на угол  $\varphi = 30^\circ$  относительно плоскости пропускания предыдущего николя. Какая часть светового потока проходит через эту систему?

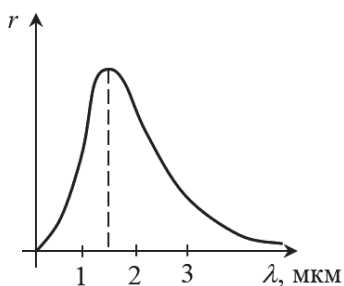
**738.** Два поляризатора расположены так, что угол между плоскостями поляризации составляет  $30^\circ$ . Определите, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении через оба поляризатора, если между ними поместить кварцевую пластинку, поворачивающую плоскость поляризации на угол  $\alpha = 45^\circ$ .

**739.** Плоскополяризованный свет падает на стопку из 3 поляризаторов. Плоскость поляризации первого поляризатора параллельна плоскости колебаний падающего света, плоскость второго составляет угол  $\varphi = 45^\circ$  с плоскостью первого, а плоскость третьего перпендикулярна плоскости первого. Как изменится интенсивность света на выходе из системы?

**740.** Показатель преломления глицерина относительно воздуха – 1,473. Под каким углом к поверхности глицерина надо направить лучи, чтобы отражённый луч был полностью поляризован? Какой угол с поверхностью глицерина образует при этом преломленный луч?

### *Элементы квантовой оптики*

**801.** На рис. 6.2 представлена кривая распределения спектральной плотности энергетической светимости (излучательной способности) абсолютно чёрного тела. Опреде-



*Рис. 6.2*

лить температуру тела, массу и импульс фотона, соответствующего излучению с длиной волны  $\lambda_0$ , а также энергию, излучаемую телом за одну секунду, если площадь поверхности тела  $0,2 \text{ м}^2$  (излучение считать равномерно распределённым по поверхности тела).

**802.** В излучении абсолютно чёрного тела, поверхность которого  $25 \text{ см}^2$ , максимум излучательной способности приходится на длину волны  $680 \text{ нм}$ . Определить мощность излучения (световой поток). Какому количеству фотонов, излучаемых телом за  $1 \text{ секунду}$  с  $1 \text{ см}^2$  поверхности, соответствует такой световой поток монохроматического излучения с длиной волны  $680 \text{ нм}$ ?

**803.** Абсолютно чёрное тело остыло до температуры  $977^\circ\text{C}$ , в результате чего длина волны, на которую приходится максимум функции распределения энергии в спектре, изменилась на  $1,16 \text{ мкм}$ . Определить начальную температуру тела. Во сколько раз изменилась интегральная энергетическая светимость тела в описанном процессе?

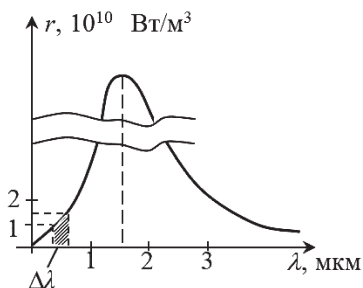


Рис. 6.3

**804.** На рис. 6.3 представлена кривая распределения спектральной плотности энергетической светимости (излучательной способности), абсолютно чёрного тела. Используя график, определить температуру тела и долю излучаемой энергии, приходящуюся на диапазон длин волн видимого света  $\Delta\lambda$  (от  $0,4$  до  $0,75 \text{ мкм}$ ).

**805.** Поток энергии, излучаемый из смотрового окошка плавильной печи, равен  $34 \text{ Вт}$ . Определить температуру в печи, если площадь отверстия  $S = 6 \text{ см}^2$  (печь с окошком считать моделью абсолютно чёрного тела). Определить также массу одного фотона той части светового потока, которая соответствует максимальному значению излучательной способности печи.

**806.** При изменении температуры абсолютно чёрного тела площадь под графиком спектральной плотности энергетической светимости увеличилась в 16 раз. Как при этом изменился импульс фотонов, соответствующих той длине волны излучения, на которую приходится максимум излучательной способности этого тела?

**807.** Поверхность тела нагрета до температуры 1000 К. Затем, одна половина этой поверхности нагревается на  $100^\circ$ , а другая охлаждается на  $100^\circ$ . Во сколько раз изменится энергетическая светимость поверхности этого тела? Какова была масса фотонов, соответствующих той длине волны, на которую приходился максимум излучательной способности тела при первоначальной температуре?

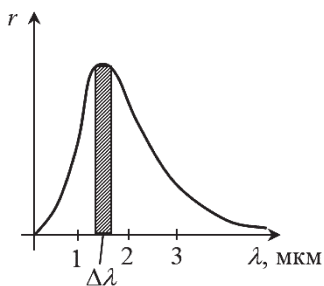


Рис. 6.4

**808.** На рис. 6.4 представлена кривая распределения спектральной плотности энергетической светимости (излучательной способности) абсолютно чёрного тела. Используя график, определить температуру тела и ширину диапазона длин волн  $\Delta\lambda$ , если известно, что доля энергии, излучаемой телом в единицу времени с единицы площади в этом диапазоне составляет 5 % от полной интегральной светимости данного тела.

*Примечание:* При малой ширине интервала  $\Delta\lambda$  энергия, излучаемая телом в единицу времени с единицы площади в этом диапазоне, может быть найдена как произведение среднего значения излучательной способности на ширину интервала.

**809.** Масса фотонов, соответствующих максимальному значению излучательной способности абсолютно чёрного тела, равна  $3 \cdot 10^{-36}$  кг. Определить температуру тела и энергию, излучаемую им за 1 секунду с  $1 \text{ см}^2$  поверхности.

**810.** Температура вольфрамовой спирали в 25-ваттной электрической лампочке равна 2 450 К. Отношение её энергетической светимости к энергетической светимости абсолютно чёрного тела равно 0,3. Найти величину излучающей поверхности спирали. Считать, что вся потребляемая энергия расходуется на излучение.

**811.** Какая доля энергии фотона израсходована на работу вырывания фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта  $\lambda_{\text{кр}} = 310$  нм, а максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов равна 4 эВ? Сравнить длину волны де Бройля для фотоэлектронов с красной границей фотоэффекта.

**812.** На фотоэлемент с литиевым катодом падает свет, масса фотонов которого равна  $10^{-35}$  кг. Найти наименьшее значение задерживающей разности потенциалов, которую нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратить фототок, и длину волны де Бройля для вырываемых электронов.

**813.** Импульс фотонов, вызывающих фотоэффект с вольфрамового катода, равен  $3,2 \cdot 10^{-27}$  кг·м/с. Определить максимальную энергию и длину волны де Бройля для электронов, вылетающих с поверхности вольфрама.

**814.** Найти задерживающую разность потенциалов, которую нужно приложить к фотоэлементу с литиевым катодом, чтобы прекратить фототок, если минимальная длина волны де Бройля для вылетающих из катода электронов равна 2 нм. Определить также энергию и импульс фотонов, вызывающих фотоэффект.

**815.** Сравнить длину волны, соответствующую красной границе фотоэффекта для калия, с длиной волны де Бройля для электронов, вылетающих с поверхности калия при её освещении светом с длиной волны  $3 \cdot 10^{-7}$  м.

**816.** Определить частоту света, падающего на серебряный катод фотоэлемента, если известно, что минимальная

длина волны де Бройля для электронов, вылетающих из катода в 10 раз меньше, чем красная граница фотоэффекта.

**817.** Красная граница фотоэффекта для некоторого металла составляет  $\lambda_{\text{кр}} = 240$  нм, а длина волны де Бройля для электронов, вылетающих из этого металла при фотоэффекте равна 2 нм. Какая доля энергии фотона расходуется при этом на работу вырывания фотоэлектрона?

**818.** Масса фотонов, вызывающих фотоэффект с вольфрамового катода, равна  $1,2 \cdot 10^{-35}$  кг. Определить максимальную энергию и длину волны де Бройля для электронов, вылетающих с поверхности вольфрама.

**819.** Частота волны де Бройля для электрона, вылетающего с поверхности некоторого металла при фотоэффекте, в 150 раз меньше частоты, соответствующей красной границе фотоэффекта. Чему равна красная граница фотоэффекта и частота падающего света, если работа выхода электрона из этого металла равна 4 эВ?

**820.** Ультрафиолетовый свет с длиной волны 0,24 мкм падает на вольфрамовый катод. Определить максимальную скорость и длину волны де Бройля для электронов, вылетающих из катода. Во сколько раз масса фотонов, вызывающих фотоэффект, больше (или меньше) массы электронов?

### *Элементы квантовой механики и ядерной физики*

**901.** Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$ . Найти вероятность пребывания частицы в интервале  $l/4 < x < l/2$ . Дать графическую иллюстрацию найденной вероятности.

**902.** Частица находится в возбуждённом состоянии ( $n = 3$ ) в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$ . Какова вероятность обнаружения частицы в узком интервале шириной  $0,02l$  вблизи точки с координатой  $x_1 = 5l/6$ ?



**903.** На рис. 6.5 представлен вид волновой функции микрочастицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$ . Определите вероятность нахождения частицы в интервале  $l/4 < x < l/2$ . Дайте графическую иллюстрацию найденной вероятности.

**904.** В одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  находится частица в невозбуждённом состоянии. Найти вероятность пребывания частицы в средней трети ямы. Дать графическую иллюстрацию найденной вероятности.

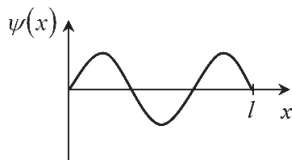


Рис. 6.5

**905.** Частица находится в возбуждённом состоянии ( $n = 6$ ) в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$ . Определить, в каких точках интервала  $0 < x < l$  плотность вероятности имеет максимальное и минимальное значения.

**906.** Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с непроницаемыми стенками. Ширина ямы  $l$ . Найти вероятность пребывания частицы в интервале  $l/4 < x < 3l/4$ . Дать графическую иллюстрацию найденной вероятности.

**907.** На рис. 6.6 представлен вид волновой функции микрочастицы, находящейся в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$ . Какова вероятность обнаружения частицы в узком интервале шириной  $0,02 l$  вблизи точки с координатой  $x_l = 3l/8$ ?

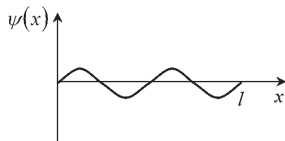


Рис. 6.6

**908.** Частица находится в возбуждённом состоянии ( $n = 3$ ) в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной

потенциальной яме шириной  $l$ . Определить, в каких точках интервала  $0 < x < l$  плотность вероятности имеет максимальное и минимальное значения.

**909.** В одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  находится частица в невозбуждённом состоянии. Найти вероятность пребывания частицы в последней четверти ямы. Дать графическую иллюстрацию найденной вероятности.

**910.** В одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $l$  находится частица в возбуждённом состоянии ( $n = 2$ ). Какова вероятность обнаружения частицы в интервале  $l/3 < x < 3l/4$ ? Дайте графическую иллюстрацию найденной вероятности.

**911.** Что произойдёт, если атомы водорода, находящиеся в невозбуждённом состоянии, бомбардировать потоком свободных электронов с энергией  $W_{\text{эл}}$  в следующих случаях:

а)  $W_{\text{эл}} < 10,2 \text{ эВ}$ ;

б)  $W_{\text{эл}} = 10,2 \text{ эВ}$ ;

в)  $W_{\text{эл}} > 10,2 \text{ эВ}$ ?

*Примечание:* При решении задачи можно воспользоваться результатами расчёта энергетического спектра атомов водорода, приведённого в примере 4 в гл. 4.3.

**912.** Что произойдёт, если атомы водорода, находящиеся в невозбуждённом состоянии, облучить потоком фотонов с энергией  $\epsilon_{\text{ф}}$  в следующих случаях:

а)  $\epsilon_{\text{ф}} < 10,2 \text{ эВ}$ ;

б)  $\epsilon_{\text{ф}} = 10,2 \text{ эВ}$ ;

в)  $\epsilon_{\text{ф}} > 10,2 \text{ эВ}$ ?

*Примечание:* При решении задачи можно воспользоваться результатами расчёта энергетического спектра атомов водорода, приведённого в примере 4 гл. 4.3. Обратите внимание на словесную формулировку второго постулата Бора, выраженного уравнением (4.20).

**913.** Атомы водорода, находящиеся в невозбуждённом состоянии, бомбардируют потоком свободно движущихся электронов. Определить, в каких пределах должна лежать энергия этих электронов, чтобы в спектре излучения водорода могла возникнуть только одна линия в серии Бальмера.

*Примечание:* Решить задачу, используя условие квантования энергии атомов водорода и второй постулат Бора, можно воспользоваться результатами расчёта энергетического спектра атомов водорода, приведённого в примере 4 гл. 4.3.

**914.** Атомы водорода, находящиеся в невозбуждённом состоянии, бомбардируют потоком свободно движущихся электронов. Определить, в каких пределах должна лежать энергия этих электронов, чтобы в спектре излучения водорода могла возникнуть только одна линия в серии Лаймана.

*Примечание:* Решить задачу, используя условие квантования энергии атомов водорода и второй постулат Бора, можно воспользоваться результатами расчёта энергетического спектра атомов водорода, приведённого в примере 4 гл. 4.3.

**915.** Определить ширину интервала длин волн, разделяющих серию Лаймана и серию Бальмера в спектре излучения атомов водорода.

*Примечание:* Решить задачу, используя условие квантования энергии атомов водорода и второй постулат Бора, можно воспользоваться результатами расчёта энергетического спектра атомов водорода, приведённого в примере 4 гл. 4.3.

**916.** Определить диапазон частот, разделяющих серию Лаймана и серию Бальмера в спектре излучения атомов водорода.

*Примечание:* Решить задачу, используя условие квантования энергии атомов водорода и второй постулат Бора, можно воспользоваться результатами расчёта энергетического спектра атомов водорода, приведённого в примере 4 гл. 4.3.

**917.** При переходе электрона с некоторой «орбиты» на вторую атом водорода излучает свет с длиной волны 434 нм. Найти номер неизвестной орбиты.

*Примечание:* Решить задачу, используя условие квантования энергии атомов водорода и второй постулат Бора, можно воспользоваться результатами расчёта энергетического спектра атомов водорода, приведённого в примере 4 гл. 4.3.

**918.** Найти квантовое число  $n$ , соответствующее возбуждённому состоянию атома водорода, если при переходе в основное состояние атом последовательно излучил 2 фотона с частотами  $0,69 \cdot 10^{15}$  Гц и  $2,46 \cdot 10^{15}$  Гц.

*Примечание:* Решить задачу, используя условие квантования энергии атомов водорода и второй постулат Бора, можно воспользоваться результатами расчёта энергетического спектра атомов водорода, приведённого в примере 4 гл. 4.3.

**919.** Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии. Как и на сколько изменится его полная, кинетическая и потенциальная энергия при поглощении фотона с длиной волны  $1,03 \cdot 10^{-7}$  м?

**920.** Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии. Как и на сколько, может измениться его полная, кинетическая и потенциальная энергия при бомбардировке атомов водорода свободными электронами с энергией 12,5 эВ?

*Примечание:* Решить задачу, используя условие квантования энергии атомов водорода и второй постулат Бора, можно воспользоваться результатами расчёта энергетического спектра атомов водорода, приведённого в примере 4 гл. 4.3.

**921.** Изотоп лития  ${}^6_3\text{Li}$  бомбардируют дейтонами, при этом образуются две  $\alpha$ -частицы, выделенная при этом энергия равна 22,3 МэВ. Найти массу изотопа лития  ${}^6_3\text{Li}$ . Массы дейтона и  $\alpha$ -частицы считать известными.

**922.** Вода нагревается от 10 °С до кипения за счёт использования всего тепла, выделяющегося при реакции

${}_3\text{Li}^7(p, \alpha)$ . Какое количество воды можно нагреть при полном разложении 3 г лития?

**923.** Определить тепловой эффект реакции  ${}^9\text{Be}(n, \gamma){}^{10}\text{Be}$ , если известно, что энергия связи ядра  ${}^9\text{Be}$  равна 58,16 МэВ, а ядра  ${}^{10}\text{Be}$  – 64,98 МэВ.

**924.** Найти массу урана  ${}^{235}\text{U}$ , которая расходуется за 1 сут. на атомной станции мощностью 3000 кВт. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия 200 МэВ. Коэффициент полезного действия считать равным 19 %.

**925.** Определить количество теплоты, выделяющейся при распаде радона с активностью  $A = 3,7 \cdot 10^{10}$  Бк за время  $t = 30$  мин. Кинетическая энергия вылетающей из радона  $\alpha$ -частицы равна 5,9 МэВ.

**926.** Энергии связи на один нуклон в ядрах  ${}^{20}\text{Ne}$ ,  ${}^4\text{He}$  и  ${}^{12}\text{C}$  равны, соответственно, 8,03; 7,07 и 7,68 МэВ. Вычислить энергию, необходимую для разделения ядра  ${}^{20}\text{Ne}$  на 2  $\alpha$ -частицы и ядро  ${}^{12}\text{C}$ .

**927.** Уран  ${}_{92}^{238}\text{U}$  в равновесии с продуктами его распада выделяет мощность  $P = 1,07 \cdot 10^{-7}$  Вт. Найти молярную теплоту  $Q_m$ , выделяемую ураном за среднее время жизни  $\tau$  атомов урана, если масса урана равна  $m = 5$  г.

**928.** Найти массу  $m$  изотопа  ${}^{235}\text{U}$ , подвергшегося делению при взрыве атомной бомбы с тротиловым эквивалентом  $50 \cdot 10^6$  кг. Тепловой эквивалент тротила  $q$  равен 4,19 МДж/кг. Считать, что в одном акте деления ядра урана  ${}^{235}\text{U}$  освобождается энергия 200 МэВ.

**929.** Вычислить число ядер урана  ${}^{235}\text{U}$ , которое должно делиться за время 1 с, чтобы выделяемая тепловая мощность была равна 1 Вт. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия 200 МэВ.

**930.** Известно, что при делении ядра урана  ${}^{235}\text{U}$  освобождается энергия около 200 МэВ. Вычислить энергию, выделяющуюся при распаде всех ядер этого изотопа урана мас-

сой 0,7 кг. Определить массу каменного угля с удельной теплотой сгорания 29,3 МДж/кг, эквивалентную в тепловом отношении 0,7 кг урана  $^{235}\text{U}$ .

**931.** Начальное количество некоторого радиоактивного изотопа уменьшилось в 3 раза за один год. Определить, во сколько раз оно уменьшится за 2 года.

**932.** За какое время  $t$  распадается  $1/7$  начального количества ядер радиоактивного изотопа, если период его полураспада  $T_{1/2} = 19$  ч?

**933.** Активность изотопа  $^{131}_{53}\text{I}$ , составляет  $A = 45$  ГБк. Определить массу  $m$  данного изотопа.

**934.** За время  $t$  активность препарата уменьшилась в  $k = 250$  раз. Скольким периодам полураспада  $T_{1/2}$  равен этот промежуток времени?

**935.** Счётчик Гейгера регистрирует поток  $\beta$ -частиц радиоактивного изотопа. В первом измерении поток частиц был равен  $N_1 = 88 \text{ с}^{-1}$ , а через 1 сут. он стал равен  $N_1 = 22 \text{ с}^{-1}$ . Определить период полураспада  $T_{1/2}$  изотопа.

**936.** За 2 сут. активность изотопа уменьшилась от  $\alpha_1 = 120$  ГБк до  $\alpha_2 = 6,6$  ГБк. Вычислить период полураспада  $T_{1/2}$  этого нуклида.

**937.** Период полураспада радиоактивного изотопа  $^{225}_{89}\text{Ac}$  составляет 10 сут. Найти долю радиоактивного изотопа  $^{225}_{89}\text{Ac}$ , которая распадается в течение времени  $t = 8$  сут.

**938.** Масса радиоактивного изотопа фосфора  $^{32}_{15}\text{P}$  составляет  $m = 3$  мг. Вычислить число  $N$  ядер, распадающихся в течение времени:  $t_1 = 5$  мин;  $t_2 = 3$  сут.

**939.** За 1 с распадается 50 атомов радиоактивного изотопа из каждого миллиона его атомов. Определить период полураспада  $T_{1/2}$  изотопа.

**940.** За время  $t = 15$  сут. активность радиоактивного изотопа уменьшилась на 23 % по сравнению с первоначальной. Найти период полураспада  $T_{1/2}$  этого изотопа.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебный процесс студента по большей части является процессом самообразования, и в силу этого обстоятельства должен быть поддержан учебно-методическими пособиями, позволяющими студенту самостоятельно справиться с большим объёмом информации.

Именно поэтому обязательными элементами учебного материала каждого из разделов являются понятийный аппарат и основные законы, необходимые для полного описания физических явлений, рассматриваемых в разделе. Это позволяет студенту сосредоточить своё внимание на тех понятиях и законах, которые необходимы при решении контрольной работы по указанной теме. Предложенные в учебном пособии примеры решения задач выполняют своеобразную роль «самоучителя», давая возможность студенту разобраться в конкретной задачной ситуации и, кроме того, эти примеры служат образцом правильного оформления контрольных заданий. Авторы считают важным включить в учебное пособие справочные материалы, позволяющие студенту оперативно работать с физическими константами и коэффициентами при расчёте физических величин.

Практика решения задач, полученная в результате выполнения контрольных работ, облегчает процесс усвоения знаний, тем самым раздвигает границы возможностей сохранения в памяти большего объёма информации. Вместе с тем, овладение понятиями и законами физики обеспечивает возможность правильного понимания многих явлений и процессов в природе и технике.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Верхотуров, А. Р. Физика: учеб. материалы и контрольные работы. Ч. 2 / А. Р. Верхотуров. – Чита, 2008. – 148 с.
2. Дмитриева, В. Ф. Основы физики: учеб. пособие / В. Ф. Дмитриева, В. Л. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Высшая школа, 2001. – 527 с.
3. Кирик, Л. А. Задачи по физике для профильной школы с примерами решений / Л. А. Кирик; под ред. В. А. Орлова. – Москва: ИЛЕКСА, 2012. – 416 с.
4. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 1: Механика. Молекулярная физика: учеб. пособие / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 432 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика: учеб. пособие / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. – 496 с.
6. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 3: Оптика. Атомная физика. Физика ядра и элементарных частиц: учеб. пособие / И. В. Савельев. – Санкт-Петербург: Лань, 2005. – 320 с.
7. Сивухин, Д. И. Общий курс физики. Т. 5: Атомная и ядерная физика. – Москва: Физматлит, 2002. – 782 с.
8. Трофимова, Т. И. Курс физики: учеб. пособие / Т. И. Трофимова. – Москва: Высшая школа, 2007. – 560 с.
9. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения: учеб. пособие / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. – Москва: Академия, 2009. – 592 с.
10. Филимонова, С. С. Оптика. Волновая и квантовая природа излучения: учеб. пособие / С. С. Филимонова. – Чита: ЗабГУ, 2009. – 132 с.



## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение А

Таблица А1

### Основные физические постоянные (округленные значения)

<i>Физическая постоянная</i>	<i>Обозначение</i>	<i>Значение</i>
Атомная единица массы	а. е. м	$1,660 \cdot 10^{-27}$ кг
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11}$ м <sup>3</sup> /(кг · с <sup>2</sup> )
Комптоновская длина волны протона	$\lambda_p$	$2,103 \cdot 10^{-16}$ м
Комптоновская длина волны электрона	$\Lambda$	$2,43 \cdot 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B$	$0,927 \cdot 10^{-23}$ А · м <sup>2</sup>
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4 \pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м
Молярная газовая постоянная	$R$	8,31 Дж/(моль · К)
Нормальное ускорение свободного падения	$g$	9,81 м/с <sup>2</sup>
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23}$ моль <sup>-1</sup>
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная закона смещения Вина	$b$	$2,90 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Планка	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Планка	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Ридберга	$R$	$3,27 \cdot 10^{15}$ Гц
Постоянная Ридберга	$R'$	$1,10 \cdot 10^7$ м <sup>-1</sup>
Постоянная Стефана–Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м <sup>2</sup> · К <sup>4</sup> )
Радиус Бора	$a$	$0,529 \cdot 10^{-10}$ м
Скорость света в вакууме	$c$	$3,00 \cdot 10^8$ м/с
Стандартный объём*	$V_m$	$22,4 \cdot 10^{-3}$ м <sup>3</sup> /моль
Удельный заряд электрона	$e/m_e$	$1,7588047 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Элементарный заряд	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Энергия ионизации атома водорода	$E_i$	$2,18 \cdot 10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
* Молярный объём идеального газа при нормальных условиях		

Таблица А2

## Энергия ионизации

<i>Вещество</i>	<i><math>E_p</math>, Дж</i>	<i><math>E_p</math>, эВ</i>
Водород	$2,18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелий	$3,94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Литий	$1,21 \cdot 10^{-18}$	75,6
Ртуть	$1,66 \cdot 10^{-18}$	10,4

Таблица А3

## Показатель преломления

<i>Вещество</i>	<i>Показатель</i>	<i>Вещество</i>	<i>Показатель</i>
Алмаз	2,42	Глицерин	1,47
Вода	1,33	Стекло	1,50...1,9
Лед	1,31	Спирт этиловый	1,36
Скипидар	1,48	Сероуглерод	1,63

Таблица А4

## Работа выхода электронов

<i>Металл</i>	<i><math>A</math>, Дж</i>	<i><math>A</math>, эВ</i>
Вольфрам	$7,2 \cdot 10^{-19}$	4,5
Калий	$3,5 \cdot 10^{-19}$	2,2
Литий	$3,7 \cdot 10^{-19}$	2,3
Оксид бария	$1,6 \cdot 10^{-19}$	1,0
Платина	$8,5 \cdot 10^{-19}$	5,3
Рубидий	$3,4 \cdot 10^{-19}$	2,1
Серебро	$7,5 \cdot 10^{-19}$	4,7
Цезий	$3,2 \cdot 10^{-19}$	2,0
Цинк	$6,4 \cdot 10^{-19}$	4,0

Таблица А5

**Относительные атомные массы (округлённые значения)  
 $A_r$  и порядковые номера  $Z$  некоторых элементов**

<i>Элемент</i>	<i>Символ</i>	<i><math>A_r</math></i>	<i><math>Z</math></i>	<i>Элемент</i>	<i>Символ</i>	<i><math>A_r</math></i>	<i><math>Z</math></i>
Азот	N	14	7	Марганец	Mn	55	25
Алюминий	Al	27	13	Медь	Cu	64	29
Аргон	Ar	40	18	Молибден	Mo	96	42
Барий	Ba	137	56	Натрий	Na	23	11
Ванадий	V	60	23	Неон	Ne	20	10
Водород	H	1	1	Никель	Ni	59	28
Вольфрам	W	184	74	Олово	Sn	119	50
Гелий	He	4	2	Платина	Pt	195	78
Железо	Fe	56	26	Ртуть	Hg	201	80
Золото	Au	197	79	Сера	S	32	16
Калий	K	39	19	Серебро	Ag	108	47
Кальций	Ca	40	20	Углерод	C	12	6
Кислород	O	16	8	Уран	U	238	92
Магний	Mg	24	12	Хлор	Cl	35	17

Таблица А6

**Массы атомов лёгких изотопов**

<i>Изотоп</i>	<i>Символ</i>	<i>Масса, а. е. м.</i>	<i>Изотоп</i>	<i>Символ</i>	<i>Масса, а. е. м.</i>
Нейтрон	$^1_0\text{n}$	1,00867	Бериллий	$^7_4\text{Be}$	7,01693
Водород	$^1_1\text{H}$	1,00783	Бериллий	$^9_4\text{Be}$	9,01219
Дейтерий	$^2_1\text{H}$	2,01410	Бор	$^{10}_5\text{B}$	10,01294
Тритий	$^3_1\text{H}$	3,01605	Бор	$^{11}_5\text{B}$	11,00930
Гелий	$^3_2\text{He}$	3,01603	Углерод	$^{12}_6\text{C}$	12,00000

Окончание табл. А6

<i>Изотоп</i>	<i>Символ</i>	<i>Масса, а. е. м.</i>	<i>Изотоп</i>	<i>Символ</i>	<i>Масса, а. е. м.</i>
	${}^4_2\text{H}$	4,00260		${}^{13}_6\text{C}$	13,00335
Литий	${}^6_3\text{L}$	6,01513		${}^{14}_6\text{C}$	14,00324
	${}^7_3\text{L}$	7,01601	Азот	${}^{14}_7\text{N}$	14,00307
Кислород	${}^{16}_8\text{O}$	15,99491			
	${}^{17}_8\text{O}$	16,99913			

Таблица А7

**Периоды полураспада радиоактивных изотопов**

<i>Изотоп</i>	<i>Символ</i>	<i>Период полураспада</i>
Актиний	${}^{225}_{89}\text{Ac}$	10 сут.
Йод	${}^{131}_{53}\text{I}$	8 сут.
Кобальт	${}^{60}_{27}\text{Co}$	5,3 г.
Магний	${}^{27}_{12}\text{Mg}$	10 мин
Радий	${}^{226}_{86}\text{Ra}$	1 620 г.
Радон	${}^{222}_{86}\text{Rn}$	3,8 сут.
Стронций	${}^{90}_{38}\text{Sr}$	27 г.
Фосфор	${}^{32}_{15}\text{P}$	14,3 сут.
Церий	${}^{144}_{58}\text{Ce}$	285 сут.

Таблица А8

## Масса и энергия покоя некоторых частиц

<i>Частица</i>	<i>m<sub>0</sub></i>		<i>E<sub>0</sub></i>	
	<i>кг</i>	<i>а. е. м.</i>	<i>Дж</i>	<i>МэВ</i>
Электрон	$9,1 \cdot 10^{-31}$	0,00055	$8,16 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1,6726 \cdot 10^{-27}$	1,00728	$1,50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1,675 \cdot 10^{-27}$	1,00867	$1,51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3,35 \cdot 10^{-27}$	2,01355	$3,00 \cdot 10^{-10}$	1 876
Тритий	$5,007 \cdot 10^{-27}$	3,01605	$4,5 \cdot 10^{-10}$	2 809,4
$\alpha$ -частица	$6,64 \cdot 10^{-27}$	4,00149	$5,96 \cdot 10^{-10}$	3 727,4
Нейтральный $\pi$ -мезон	$2,41 \cdot 10^{-28}$	0,14498	$2,16 \cdot 10^{-11}$	135

Таблица А9

## Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

<i>Наименование приставки</i>	<i>Обозначение</i>	<i>Множитель</i>
Экса	Э	$10^{18}$
Пэта	П	$10^{15}$
Тера	Т	$10^{12}$
Гига	Г	$10^9$
Мега	М	$10^6$
Кило	к	$10^3$
Гекто	г	$10^2$
Дека	да	$10^1$
Деци	д	$10^{-1}$
Санتي	с	$10^{-2}$
Милли	м	$10^{-3}$
Микро	мк	$10^{-6}$
Нано	н	$10^{-9}$
Пико	п	$10^{-12}$
Фемто	ф	$10^{-15}$
Атто	а	$10^{-18}$

## Греческий алфавит

<i>Обозначения букв</i>	<i>Название букв</i>	<i>Обозначения букв</i>	<i>Названия букв</i>
Α, α	Альфа	Ν, ν	Ню
Β, β	Бета	Ξ, ξ	Кси
Γ, γ	Гамма	Ο, ο	Омикрон
Δ, δ	Дэльта	Π, π	Пи
Ε, ε	Эпсилон	Ρ, ρ	Ро
Ζ, ζ	Дзета	Σ, σ	Сигма
Η, η	Эта	Τ, τ	Тау
Θ, θ	Тэта	Υ, υ	Ипсилон
Ι, ι	Йота	Φ, φ	Фи
Κ, κ	Каппа	Χ, χ	Хи
Λ, λ	Лямбда	Ψ, ψ	Пси
Μ, μ	Мю	Ω, ω	Омега

*Учебное издание*

**Савченко** Нина Дмитриевна  
**Кузьмина** Татьяна Витальевна  
**Дружинин** Анатолий Прокопьевич  
**Рахлецова** Татьяна Викторовна

## **ОСНОВЫ ФИЗИКИ**

### **Часть 2**

**Физика колебаний и волн**  
**Основы квантовой механики**  
**Физика атомного ядра и элементарных частиц**

На обложке использован материал, взятый из интернет-источника  
(URL: <http://www.kakprosto.ru/>)

Редактор Е. В. Валюкова  
Вёрстка Г. А. Зенковой

Подписано в печать 27.12.17.  
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.  
Способ печати цифровой.  
Усл. печ. л. 15,3. Уч.-изд. л. 9,4. Заказ № 17286.  
Тираж 100 экз. (1-й з-д 1–37).

ФГБОУ ВО «Забайкальский государственный университет»  
672039, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30